LA GRAFICACIÓN COMO HERRAMIENTA PARA CALCULAR INTEGRALES DEFINIDAS CON $f(x)$ A TROZOS

F. Morales Couoh[1]
A.A. Alvarado Segura[2]

RESUMEN

El presente trabajo evidencia la necesidad de incorporar la graficación, como una herramienta para la enseñanza y aprendizaje de las integrales definidas con $f(x)$ a trozos. El interés nace a partir de las observaciones que se realizaron a las "formas" en las que estudiantes y docentes argumentan la solución de este tipo de integrales. Se supone que lo anterior se debe a la carencia de marcos de referencia que permiten resignificar las integrales, por ejemplo, las de graficación y visualización. La Socioepistemología asume que los marcos y prácticas de referencia subyacen de la propia construcción del conocimiento en situaciones específicas, es decir, del uso del conocimiento en situaciones específicas, los cuales son modelados por las prácticas (sociales) como la de graficación. Resulta de interés el hecho de encontrar usos de las gráficas, como el cálculo de áreas en las sumas de Riemann y en el Teorema Fundamental de Cálculo en los libros de texto con gran influencia escolar para la integral definida e incluso en las distribuciones discretas y continuas. Sin embargo, esta manera de proceder no es considerada para el cálculo de las integrales de interés, pues se piensa erróneamente que dicha vía invalida aquellos logrados con los métodos y algoritmos de solución; por el contrario, esto último, en el mejor de los casos, conlleva a un buen desarrollo de los procedimientos analíticos o algebraicos de los conceptos, pero no así un conocimiento funcional.

ANTECEDENTES

Cordero, Muñoz y Solís (2003), reportan que la génesis de la integral (definida) es atribuida al cálculo de áreas de figuras geométricas amorfas, pasando desde aquéllas susceptibles de ser calculadas con incrustación de triángulos y rectángulos, hasta las que pueden ser aproximadas mediante el barrido de una malla, y en general, las consideradas como el área bajo la curva de una función en un intervalo cerrado dado (ver Figura 1).

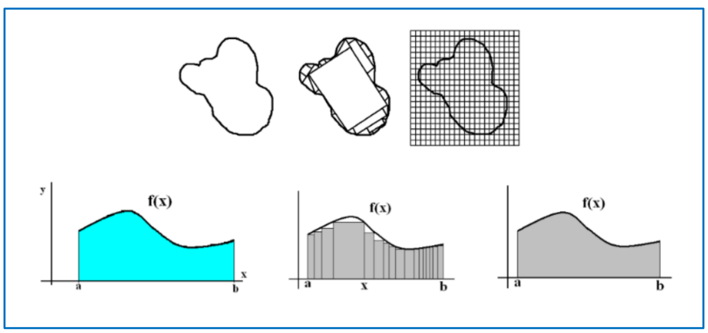


Figura 1. Génesis del Cálculo de Áreas**.** Elaboración Propia

La presente investigación centrará su atención a la integral definida como el área bajo la curva, ya que en la mayoría de los libros de Cálculo de gran influencia escolar (Ayres, 2010;

[1] Fidel Morales Couoh. Profesor de Asignatura. hocaba-fidel@hotmail.es Tecnológico Nacional de México/ I.T. Superior del Sur del Estado de Yucatán. Carretera Muna-Felipe Carrillo Puerto Tramo Oxkutzcab-Akil, Km. 41+400, 97880 Oxkutzcab, Yucatán, México.
[2] Arturo Antonio Alvarado Segura. Profesor de Tiempo Completo, a_alvaradosegura@outlook.com Tecnológico Nacional de México/ I.T. Superior del Sur del Estado de Yucatán. Carretera Muna-Felipe Carrillo Puerto Tramo Oxkutzcab-Akil, Km. 41+400, 97880 Oxkutzcab, Yucatán, México.

Larson, 2009; Purcell, Varberg y Rigdon, 2007; Stewart, 2013), resulta evidente la presentación, a manera de algoritmo, de una secuencia de pasos para aproximar una integral definida; por ejemplo, las sumas de Riemann. Empero, para el cálculo de la integral definida, son ineludibles las sumas (infinitas) de Riemann, o bien encontrar la antiderivada y la aplicación del Teorema Fundamental de Cálculo, incluso, mediante serie de potencias.

Investigaciones enmarcadas en la Socioepistemología, advierten que el proveer métodos y algoritmos eficientes de resolución, conlleva en el mejor de los casos, a un buen desarrollo de los procedimientos analíticos o algebraicos de los conceptos, pero no así a un conocimiento funcional (Cordero, 2006; Cordero y Flores, 2007; Morales y Cordero, 2007; Morales 2010, 2015).

Para entender lo anterior, la investigación realizada por Morales (2010), inicia pidiendo a un grupo de estudiantes de nivel superior anticipar la solución gráfica de una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes como lo muestra la Figura 2.

De acuerdo con Morales (2010, p. 20), la mayoría resolvió analíticamente la ecuación diferencial, pero “nadie reconoció que la solución de una ecuación diferencial subyace de la misma ecuación. Ni mucho menos reflexionó con respecto al comportamiento de la solución de la ecuación diferencial según la función (continua a trozos)”.

Resolver la *ED de segundo orden con coeficientes constantes* $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = F(x)$ *con* $y(0) = A, y'(0) = B$ *y* $F(x)$ *continua a trozos*

Figura 2. Ecuación Diferencial. Morales, 2010

Siguiendo la brecha trazada por la Socioepistemología, la investigación que se presenta surge a partir de la siguiente reflexión, cuando se plantea a un grupo de estudiantes y docentes de nivel superior, calcular la integral definida $\int_2^5 f(x)dx$, con $f(x) = \begin{cases} 3 & si \quad x < 3 \\ 6 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$. Sorprendía el hecho de que la mayoría de los participantes no pudo dar una respuesta sin antes recurrir a resolver mediante métodos y algoritmos de solución como la aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo, incluso respondiendo erróneamente (ver Figura 3).

Conviene señalar que ningún participante reconoció que la solución de la integral definida subyace de la misma función dada; es decir, nadie reflexionó que tal integral es el área bajo la curva según la función definida por partes.

$\int_2^5 3\,dx = 3x\Big|_2^5 = 3(5) - 3(2) = 15 - 6 = 9$

y

$\int_2^5 6\,dx = 6x\Big|_2^5 = 6(5) - 6(2) = 30 - 12 = 18$

Entonces esto es la integral solicitada.

Figura 3. Resolución de la integral definida. Elaboración propia

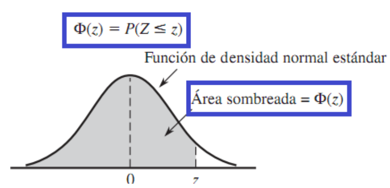
Año 7, No. 12, Enero - Diciembre de 2020 | ISSN: 2395-9878

Dado lo anterior, surgen las siguientes interrogantes: ¿cómo vive y se desarrolla la noción de integral definida en los libros de texto con gran influencia escolar?, y ¿por qué los participantes no logran relacionar la integral definida como el área bajo la curva? El primer cuestionamiento permitirá conocer las formas en las que se presenta la integral definida, mientras que la segunda apunta al privilegio que se pudiera estar dando para favorecer estas formas.

Ante tales cuestionamientos, se piensa que una de las limitaciones podría ser las creencias por parte de estudiantes y/o docentes, como se evidenció en el párrafo anterior; sin embargo, se pudiera proponer la resolución de una secuencia de actividades con el fin de contrastar la importancia de concebir la integral definida como el área bajo la curva, por ejemplo, para el cálculo de integrales definidas "sencillas" susceptibles de ser calculadas como el área bajo la curva.

La importancia de concebir la integral, al menos en principio, como área bajo la curva, conlleva múltiples beneficios al estudiante, entre los que podemos mencionar, el cálculo de probabilidades de una distribución normal, y en general, para cualquier distribución continua o discreta donde se requiera el uso de tablas ya elaboradas, debido a la "complejidad" de los cálculos que involucran. Por ejemplo, para el cálculo de probabilidades de una distribución normal estándar, una de las preguntas más frecuentes por parte de estudiantes es "¿cuál tabla (normal) utilizaremos?". Tal cuestionamiento evidencia la carencia de considerar el cálculo de probabilidades como el área bajo la curva de la función de densidad normal estándar; es decir, la probabilidad es igual a calcular una integral definida. La Figura 4, muestra parte de la "tabla normal", y se hace referencia explícita que $P(Z \leq z)$ es el área sombreada.

Tabla A.3 Áreas de la Curva normal estándar



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010

Figura 4. La "tabla normal". Devore, 2008

METODOLOGÍA

La investigación toma como hipótesis que los marcos de referencia para resignificar la integral definida como área bajo la curva están ausentes en el discurso matemático escolar. Se entenderá como resignificación al uso del conocimiento en una situación específica, donde se debate entre su funcionamiento y su forma acorde a lo que se organiza, y como consecuencia se adquiere así sentido y significación (Cordero, 2006). Es decir, no se ha logrado concebir a la graficación como algo que se encuentra y se desarrolla en el discurso matemático escolar.

De hecho, para lograr lo anterior, la graficación no será tratada como la representación estricta del concepto de función, más bien, como aquello que permite que el conocimiento se construya como tal.

La metodología utilizada para atender la hipótesis planteada consiste en la revisión de libros de texto. Incluso, Cordero y Flores (2007), advierten que los libros de texto juegan un papel importante, ya que son un referente para todas las acciones de enseñanza y aprendizaje, e incluso las selecciones del conocimiento (ejemplos y ejercicios) que el docente hace en su práctica de enseñar son tomadas, precisamente, de los libros. Sin embargo, existen otros marcos de referencia que no han sido considerados, aun estando presentes, ya que, en el modelo empleado en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel superior, el cual consiste en una serie de secuenciaciones lógicas de conceptos, los sentidos no son considerados como componentes de tales secuenciaciones (Cen, 2006; Cordero, 2006; Cordero y Flores, 2007).

En este sentido Cen (2006), identifica cinco usos de las gráficas en el nivel Medio Superior *la distribución de puntos*, la gráfica se presenta por vez primera al ubicar puntos en el plano cartesiano para el bosquejo de la gráfica de una función; este uso se desarrolla y da origen al *uso comportamiento geométrico* cuyo fin es identificar la relación existente entre una ecuación y su forma gráfica; se desarrolla este uso y se presenta *el análisis de la curva* con la finalidad de identificar las variaciones (crecimiento, decrecimiento, concavidades, máximos, mínimos y puntos de inflexión) que presenta la curva en intervalos definidos de ella, y por último *el cálculo de área y volumen*; mientras que el *uso análisis de información* está disociado de los demás usos. En el Figura 5, se aprecia el desarrollo de la parábola, donde cada momento se confronta al debatir entre su funcionamiento y su forma (ver Figura 5).

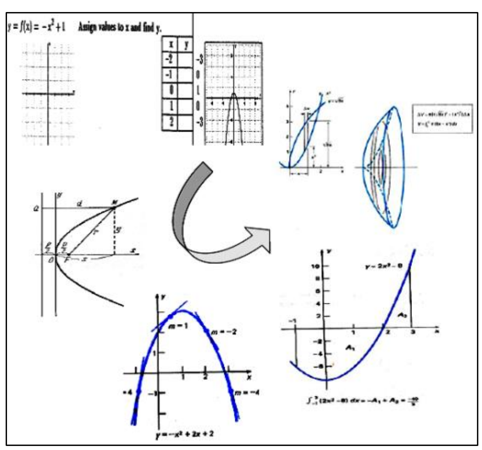


Figura 5. Desarrollo de la parábola. Recuperado de: Cen, 2006

De la misma manera, Morales (2015) realiza un análisis de textos matemáticos del nivel superior, sugeridos en el programa y plan de estudio de Cálculo Integral para las ingenierías del Tecnológico Nacional de México (TecNM), con el fin de caracterizar los usos de las gráficas de las sumas de Riemann, a través de sus funcionamientos y sus formas. El análisis proveyó dos usos de las gráficas (ver Figura 6): la *Distribución de puntos*, el funcionamiento de este uso es la ubicación de puntos muestra x_i^* en el eje cartesiano para indagar gráficamente sobre las imágenes $f(x_i^*)$, las formas en que se presenta es mediante el cálculo de $\Delta x = (b-a)/n$. Y el uso en el *Cálculo de áreas*, el funcionamiento es la ubicar de puntos muestra en el plano xy e indagar gráficamente sobre el área debajo de la curva, la forma en que se presenta esto es mediante el cálculo de las sumas de las áreas de los rectángulos.

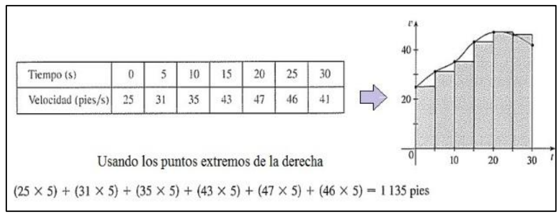


Figura 6. Desarrollo de las sumas de Riemann. Morales, 2015

Dada la problemática en cuestión, así como, los cuestionamientos planteados se usan como marco teórico la Socioepistemología, ya que considera que la construcción del conocimiento matemático es normada por las prácticas (sociales de graficación), por lo que tiene sentido hablar de usos de esas prácticas en situaciones específicas, los cuales son expresados de alguna forma y cada una de éstas tiene cierta funcionalidad.

RESULTADOS

El diseño de las actividades didácticas con base a las investigaciones enmarcadas en la Socioepistemología, incitaron a entender a la graficación como una práctica social y no como la representación estricta del concepto de función, ya que soporta el desarrollo de razonamiento y de la argumentación, siendo igual de válidas que los realizados con la estructura formal de las matemáticas. Bajo este encuadre, se analizaron los libros de Cálculo, de gran influencia escolar, atribuidos a autores como Ayres (2010), Larson (2009), Purcell *et al.* (2007) y Stewart (2013), sobre las nociones de la integral definida, obteniendo lo que a continuación se describe.

Un primer contacto sobre el cálculo aproximado de la integral definida es referida a las sumas de Riemann (véase Tabla 1). Esto es, si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$, se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos discretos de igual ancho $\Delta x = (b-a)/n$. Enseguida, se encuentran los puntos extremos $x_0(=a), x_1, x_2, \ldots, x_{n-1},\ x_n(=b)$ de estos subintervalos. Posteriormente, elegir los puntos muestra $x_0{}^*, x_1{}^*, x_2{}^*, \ldots, x_{n-1}{}^*,\ x_n{}^*$ en estos subintervalos, de modo que $x_i{}^*$, se encuentra en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, para su posterior evaluación $f(x^*{}_i)$ y así poder calcular la suma de los productos $f(x^*{}_i)\Delta x$, formalmente expresadas como $\sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\Delta x$.

Tabla 1. *Suma de Riemann*

DEFINICIÓN DE UNA SUMA DE RIEMANN
Sea f definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, y sea Δ una partición de $[a, b]$ dada por $$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdot \cdot \cdot < x_{n-1} < x_n = b$$ donde Δx_i es el ancho del i-ésimo subintervalo. Si c_i es *cualquier* punto en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ entonces la suma $$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i, \qquad x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$ se denomina una **suma de Riemann** de f para la partición Δ.

Nota Fuente: Larson, 2010

Algo importante de rescatar sobre los puntos muestra, consiste en que, por lo general, son los extremos de la izquierda o bien, los de la derecha de cada subintervalo, comúnmente nombrado inscritos o circunscritos a la curva de la función. De donde, la expresión $\sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^{*})\Delta x$, conducirá a la definición de integral definida como el límite de la suma de las áreas de estos rectángulos, cuando el número de rectángulos se hace muy grande (n tiende a infinito). Esto es, la integral definida de una función $f(x)$ continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ (véase Tabla 2), el cual es expresado como $\int_a^b f(x)\,dx$.

Tabla 2. *Integral Definida*

DEFINICIÓN DE UNA INTEGRAL DEFINIDA
Si f se define en el intervalo cerrado $[a, b]$ y el límite de las sumas de Riemann sobre las particiones Δ $$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$ existe (como se describió antes), entonces f es **integrable** en $[a, b]$ y el límite se denota por $$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$ El límite recibe el nombre de **integral definida** de f de a a b. El número a es el **límite inferior** de integración, y el número b es el **límite superior** de integración.

Nota Fuente: Larson, 2010

Otro momento identificado para el cálculo de la integral definida, es atribuido al Teorema Fundamental de Cálculo (véase Tabla 3), donde lo verdaderamente importantes es el cálculo de la primitiva o antiderivada de la función. Conviene precisar lo siguiente, para el cálculo de la antiderivada o primitiva se hace mucho énfasis a los métodos de integración como sugiere el temario (véase Tabla 5): *directo, cambio de variable, por partes, trigonométricas, sustitución trigonométrica* y *fracciones parciales*.

Tabla 3. *Teorema fundamental del cálculo*

TEOREMA 4.9 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Nota Fuente: Larson, 2010

Enseguida, se rescata el método del trapecio para la aproximación de la integral definida (véase Tabla 4).

Tabla 4. *Regla del trapecio*

TEOREMA 4.17 LA REGLA DE LOS TRAPECIOS

Sea f continua en $[a, b]$. La regla de los trapecios para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ está dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdot \cdot \cdot + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].$$

Además, como $n \to \infty$, el lado derecho se aproxima a $\int_a^b f(x)\,dx$.

Nota Fuente: Larson, 2010

Ahora bien, en cuanto al análisis del plan de estudios de la asignatura de *Cálculo Integral* con clave *ACF-0902* dado por el Tecnológico Nacional de México (TecNM, 2014), se pudo apreciar que los libros de Cálculo, siguen una secuencia semejante a la que propone el plan de estudios (ver Tabla 5).

Tabla 5. *Temas de Cálculo Integral*

No.	Temas	Subtemas
1	Teorema fundamental del cálculo.	1.1 Medición aproximada de figuras amorfas. 1.2 Notación sumatoria. 1.3 Sumas de Riemann. 1.4 Definición de integral definida. 1.5 Teorema de existencia. 1.6 Propiedades de la integral definida. 1.7 Función primitiva. 1.8 Teorema del valor intermedio. 1.9 Teorema fundamental del cálculo. 1.10 Cálculo de integrales definidas básicas.
2	Métodos de integración e integral indefinida.	2.1 Definición de integral indefinida. 2.2 Propiedades de integrales indefinidas 2.3 Cálculo de integrales indefinidas. 2.3.1 Directas. 2.3.2 Cambio de variable. 2.3.3 Por partes. 2.3.4 Trigonométricas. 2.3.5 Sustitución trigonométrica. 2.3.6 Fracciones parciales.
3	Aplicaciones de la integral.	3.1 Áreas. 3.1.1 Área bajo la gráfica de una función. 3.1.2 Área entre las gráficas de funciones. 3.2 Longitud de curvas. 3.3 Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución. 3.4 Integrales impropias. 3.5 Aplicaciones.
4	Series.	4.1 Definición de sucesión. 4.2 Definición de serie. 4.2.1 Finita 4.2.2 Infinita 4.3 Serie numérica y convergencia. Criterio de la razón. Criterio de la raíz. Criterio de la integral. 4.4 Series de potencias. 4.5 Radio de convergencia. 4.6 Serie de Taylor. 4.7 Representación de funciones mediante la serie de Taylor. 4.8 Cálculo de integrales de funciones expresadas como serie de Taylor.

Nota Fuente: TecNM, 2014

A continuación, se presentan los cuatro usos de las gráficas encontrados para la integral definida:

1. *Cálculo de áreas en las sumas de Riemann*. El funcionamiento el aproximar el área bajo la curva y la forma es mediante el cálculo y sumas de áreas de rectángulos (véase Figura 7).

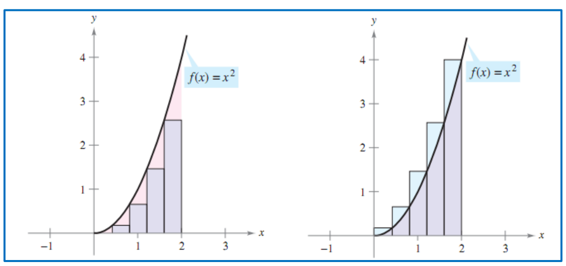


Figura 7. Área en las sumas de Riemann. Larson, 2010

2. *Cálculo de áreas en la integral definida.* El funcionamiento es calcular el área bajo la curva y la forma es mediante el cálculo del límite de las sumas de Riemann (véase Figura 8).

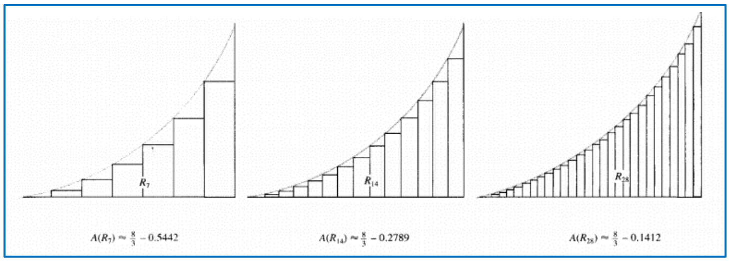


Figura 8. Cálculo de la integral definida. Purcell *et al*,. 2007

3.- *Cálculo de áreas en el teorema fundamental del cálculo (tfc).* El funcionamiento es calcular el área bajo la curva y la forma es mediante el cálculo de la antiderivada, lo que implica el cálculo de la integral indefinida, y el uso del teorema fundamental del cálculo (véase Figura 9).

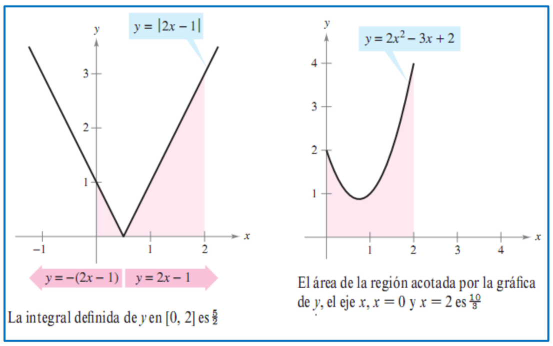


Figura 9. Cálculo de áreas en el TFC. Larson, 2010

4.- *Cálculo de áreas en la regla de los trapecios*. El funcionamiento es aproximar el área bajo la curva y la forma es mediante el cálculo y suma de pares de trapecios que subyacen del área bajo la curva (véase Figura 10).

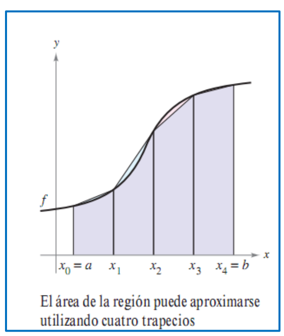
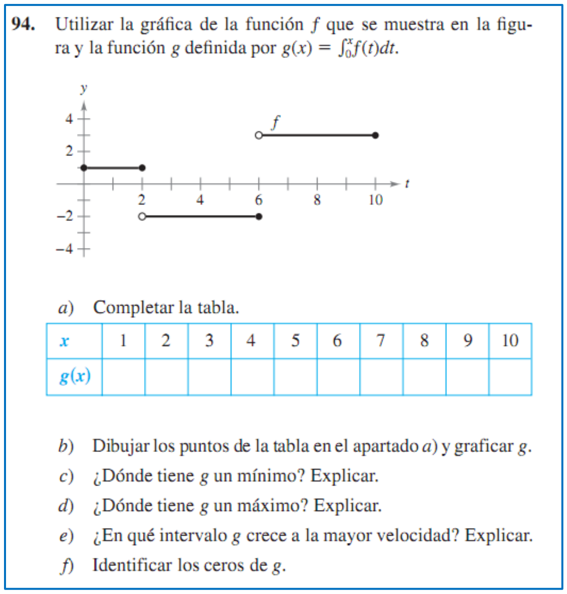


Figura 10. Cálculo de áreas en la regla del trapecio. Larson, 2010

Sin embargo, en Larson (2010), se sugiere a manera de ejercicio, utilizar la gráfica de la función para el cálculo de una integral definida con $f(x)$ a trozos, como lo sugiere el ejercicio que se muestra en la Figura 11.



94. Utilizar la gráfica de la función f que se muestra en la figura y la función g definida por $g(x) = \int_0^x f(t)dt$.

a) Completar la tabla.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g(x)$										

b) Dibujar los puntos de la tabla en el apartado *a)* y graficar g.
c) ¿Dónde tiene g un mínimo? Explicar.
d) ¿Dónde tiene g un máximo? Explicar.
e) ¿En qué intervalo g crece a la mayor velocidad? Explicar.
f) Identificar los ceros de g.

Figura 11. Cálculo de una integral definida. Larson, 2010

Las manifestaciones de estos escenarios gráficos pueden ser observadas; por ejemplo, haciendo simulación virtual en un aula de cómputo o discutiendo entre los miembros de un equipo los comportamientos y conclusiones gráficas que brinda una calculadora en una mesa de trabajo como sugiere Suárez y Cordero (2005).

En términos generales, las prácticas de graficación ayudarán a descubrir las causas reales del desarrollo (social) de la integral definida. En este sentido, el diseño de una secuencia de actividades basadas en el cálculo de áreas como noción de la integral definida, permitirá reconocer que la solución una integral definida subyace de la misma función dada, según la función (continua a trozos) (véase Figuras 11 y 12).

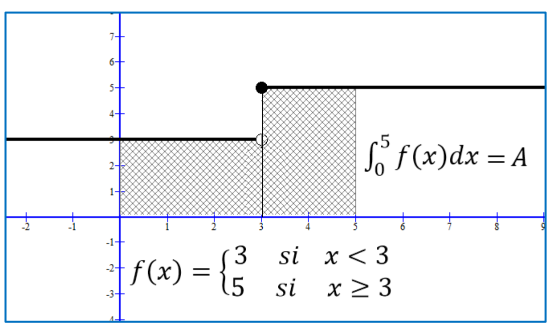


Figura 12. El cálculo de áreas bajo la curva. Elaboración propia

Algo importante de rescatar radica en que las definiciones de sumas de Riemann, integral definida, Teorema Fundamental del Cálculo y regla del trapecio (véanse Figuras 3, 4, 5 y 6 respectivamente), advierten que $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Ahora nace el cuestionamiento sobre las nociones de continuidad de una función, el cual abrirá una gama de investigaciones futuras.

CONCLUSIONES

Como resultado de la revisión de los libros de texto, así como, el plan de estudios para la asignatura de cálculo integral, se pudo apreciar que siguen una estructura coherente de secuenciaciones lógicas de conceptos e idénticas en la distribución de los temas de la asignatura, con excepción del método de trapecio que, únicamente, es tratado en los libros de texto. Asimismo, el área bajo la gráfica de una función es tratada como una aplicación de la integral definida (ver Tabla 5), y no, así como aquello que ayudó al desarrollo (social) de tal conocimiento, hecho que sugiere por qué los participantes no logran relacionar la integral definida como el área bajo la curva.

El considerar a la graficación como aquello que permite que el conocimiento se construya como tal, y no, así como la representación estricta del concepto de función, llevó a identificar momentos, dentro de las secuenciaciones (lógicas de conceptos), del uso del cálculo de áreas. Los cuatro usos de las gráficas encontrados (ver Figuras 7, 8, 9 y 10), sugiere considerar a la graficación como algo que vive en el discurso escolar, es decir, se ha ido, y se seguirá, desarrollando a lo largo de la vida del estudiante. Por lo que, se exhorta a docentes de matemáticas incorporar y promover actividades donde esos momentos identificados sean desarrollados y que, seguramente se pondrá de manifiesto argumentos que son igual de validos como aquellos presentados siguiendo la estructura formal de la matemática.

BIBLIOGRAFÍA

Ayres, Frank (2010). *Cálculo* (5a Ed). México: McGraw-Hill

Cen, C. (2006). *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato*. Tesis de Maestría. Cinvestav-IPN, México

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 4(2)*, pp. 103-128.

Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano.* Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C. pp.265-286.

Cordero, F., Muñoz, G. y Solís, M. (2003). *La integral y la noción de variación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 10(1)*, pp. 7-38.

Devore, J. (2008). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias* (7ª. Ed.). México Cengage Learning.

Larson, R. (2009). *Matemáticas 2: Cálculo Integral*. México: McGraw Hill

Morales, F. y Cordero, F. (2007). El uso de las gráficas en la confrontación entre la continuidad Euleriana y la estabilidad de las ecuaciones diferenciales de segundo orden. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. (20)*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Morales, F. (2010). *El uso de las gráficas como un marco de referencia para resignificar la estabilidad de las ecuaciones diferenciales de segundo orden*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Morales, F. (2015). Uso de las gráficas en las sumas de Riemann. *Academia Journals. V.(7).* No. 1. Villahermosa, Tabasco, México.

Purcell, E., Varberg, D. y Rigdon, S. (2007). *Cálculo.* México: Pearson,

Stewart, J. (2013). *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas.* (7ª. Ed.). México: Cengage Learning.

Suárez, L. y Cordero, F. (2005). Modelación en Matemática Educativa. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. (18),* pp. 639-644.

Tecnológico Nacional de México (2014). *Plan de Estudios de Cálculo Integral*. Recuperado de: http://www.itpiedrasnegras.mx/temarios/comunes/calculo-integral-acf-0902.pdf