

USO DE HERRAMIENTAS DE VISUALIZACIÓN GRÁFICA EN LA ENSEÑANZA DE MÉTODOS NUMÉRICOS

USING GRAPHICAL VISUALIZATION TOOLS FOR TEACHING NUMERICAL METHODS

R. S. Zamora Pequeño¹
O. Zamora Pequeño²
F. Banda Muñoz³

RESUMEN

El aprendizaje de Métodos Numéricos es fundamental en la educación de ingeniería y ciencias aplicadas. La utilización de software computacional facilita la comprensión de estos métodos al proporcionar representaciones gráficas y análisis interactivos. En este artículo, se analiza el uso del lenguaje de programación R y sus capacidades gráficas como una herramienta efectiva para la enseñanza del Método de Newton-Raphson en la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León (FIME-UANL). Se presenta un análisis comparativo de los resultados obtenidos por estudiantes de las carreras de Ingeniería en Electrónica y Automatización (IEA) e Ingeniería en Tecnología de Software (ITS).

ABSTRACT

Learning numerical methods is fundamental in engineering and applied sciences education. The use of computational software facilitates the understanding of these methods by providing graphical representations and interactive analysis. This article explores the use of the R programming language and its graphical capabilities as an effective tool for teaching the Newton-Raphson Method at the Faculty of Mechanical and Electrical Engineering at the Autonomous University of Nuevo León (FIME-UANL). A comparative analysis of the results obtained by students from the Electronics and Automation Engineering (IEA) and Software Technology Engineering (ITS) programs is presented.

ANTECEDENTES

La unidad de aprendizaje de Métodos Numéricos es una asignatura de los planes de estudio de las carreras de Ingeniería en Electrónica y Automatización (IEA) e Ingeniería en Tecnología de Software (ITS) de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la UANL, se imparte generalmente en el quinto semestre y forma parte del núcleo de formación matemática aplicada de

los estudiantes. Su enseñanza tradicionalmente ha dependido de métodos teóricos y ejercicios manuales, lo que a menudo genera dificultades para la comprensión de conceptos abstractos y su aplicación en problemas reales (Lasheras, 2019).

Uno de los métodos principales del curso es el Método de Newton-Raphson, una técnica iterativa para encontrar raíces de ecuaciones no lineales. Sin embargo, su comprensión puede resultar compleja debido a la necesidad de calcular derivadas y evaluar la convergencia del método. Diversos estudios han demostrado que los estudiantes enfrentan dificultades al aprender este método sin apoyo gráfico, lo que limita su comprensión conceptual y su

¹Profesor Asociado de Tiempo Completo. Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo León. raymundo.zamorapqn@uanl.edu.mx

²Profesor Asociado de Tiempo Completo. Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo León, oralia.zamorapq@uanl.edu.mx

³Profesor Titular de Tiempo Completo. Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo León. fernando.bandamn@uanl.edu.mx

capacidad de aplicarlo en contextos reales. Según McBride (1983), la incorporación de gráficos en la enseñanza de métodos numéricos puede mejorar significativamente la comprensión y la retención del conocimiento al permitir a los estudiantes visualizar la convergencia del método.

El uso de herramientas computacionales ha demostrado ser una estrategia eficaz para abordar estos desafíos. En este contexto, el lenguaje de programación R, un software de acceso libre ampliamente utilizado en análisis de datos y matemáticas aplicadas, se presenta como una alternativa viable para la enseñanza de métodos numéricos debido a su capacidad para realizar cálculos matemáticos avanzados y generar visualizaciones interactivas.

De acuerdo con Carroll (1992), la enseñanza de métodos numéricos con apoyo computacional requiere un equilibrio entre la teoría y la implementación práctica para que los estudiantes desarrollen habilidades analíticas y técnicas. Según Ketcheson (2014), el aprendizaje basado en la indagación y el uso de herramientas interactivas mejoran la comprensión de los estudiantes, ya que les permite experimentar con diferentes escenarios y evaluar el comportamiento de los algoritmos numéricos en tiempo real. De manera similar, Handayani et al. (2017) han mostrado que el uso de software educativo facilita la enseñanza de conceptos matemáticos complejos al proporcionar una representación visual que permite reducir el tiempo necesario para la comprensión de estos temas.

Dado el impacto positivo del uso de herramientas computacionales en la enseñanza de métodos numéricos, en este estudio, realizado durante 2024, se evalúa la implementación del lenguaje de programación R para mejorar la enseñanza del Método de Newton-Raphson.

Objetivo General

Evaluar la eficacia del uso de herramientas de visualización gráfica en la enseñanza del Método de Newton-Raphson en la FIME-UANL para mejorar la comprensión y desempeño de estudiantes de los programas educativos IEA e ITS.

Objetivos específicos

Implementar el Método de Newton-Raphson en R y desarrollar visualizaciones interactivas. Comparar el desempeño de los estudiantes que utilizaron R con aquellos que emplearon únicamente enfoques teóricos.

METODOLOGÍA

El método de Newton-Raphson se basa en la siguiente fórmula iterativa para aproximar las raíces de una función $f(x)$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

En esa ecuación, x_n representa la aproximación actual de la raíz en la n -ésima iteración, $f(x_n)$ es el valor de la función evaluada en x_n , $f'(x_n)$ es el valor de la derivada de la función evaluada en x_n , y x_{n+1} es la nueva aproximación de la raíz después de la iteración.

Este proceso iterativo continúa hasta que la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas

sea menor al margen de error, indicando que se ha alcanzado una solución suficientemente precisa.

En este estudio, se empleó un script en R como recurso de enseñanza para guiar a los estudiantes en la resolución de un ejercicio con el método de Newton-Raphson. Esta herramienta permite a los estudiantes visualizar cada iteración del método, analizando el comportamiento de la función y la convergencia de la solución.

Posteriormente, se llevó a cabo una evaluación del aprendizaje, comparando el desempeño entre los siguientes grupos:

Grupo 1: Estudiantes que utilizaron el script de R para visualizar y aplicar el Método de Newton-Raphson mediante simulaciones y gráficos.

Grupo 2: Estudiantes que aprendieron el método mediante recursos teóricos y cálculos manuales.

El grupo 1 está conformado por 30 estudiantes, mientras que el grupo 2 está integrado por 32, la distribución de estudiantes por programa educativo se muestra en la Tabla 1. En ambos casos, los estudiantes cursan la unidad de aprendizaje por primera vez.

Tabla 1. Distribución por programa educativo de los grupos analizados.

Programa Educativo	Grupo 1	Grupo 2	Total
IEA	6	4	10
ITS	24	28	52
Total	30	32	62

Se evaluaron los resultados en el aprendizaje mediante una prueba escrita, la cual se muestra en la Figura 1.

Figura 1. Prueba de Evaluación.

Prueba del Método de Newton-Raphson.
 El método de Newton-Raphson es un método numérico iterativo para encontrar raíces de ecuaciones de la forma $f(x) = 0$. La fórmula iterativa está dada por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Función dada

$f(x) =$

Derivada de la función

$f'(x) =$

Tabla de Iteraciones

Iteración	x	f(x)	f'(x)
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Para evaluar el impacto del uso de herramientas computacionales en el aprendizaje, se utilizaron pruebas estadísticas al conjunto de calificaciones obtenidas por los estudiantes, validando previamente la normalidad de las muestras.

Pruebas estadísticas

La prueba de Shapiro-Wilk evalúa la hipótesis nula de que una muestra proviene de una distribución normal (Shapiro, 1965).

El estadístico de esta prueba se define como:

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i x_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

En esa ecuación $x_{(i)}$ representa los valores ordenados de la muestra, \bar{x} es la media muestral, a_i son coeficientes calculados a partir de la varianza y la media de una distribución normal y n es el tamaño de la muestra.

Si el valor calculado de W es menor que el valor crítico de W para el nivel de significancia, (α), el p-valor asociado se considera menor a α por lo que se rechaza la hipótesis de normalidad.

Si los datos no muestran una distribución normal, para comparar dos muestras independientes, se debe emplear la prueba de Mann-Whitney U, la cual se basa en la suma de los rangos de las observaciones de ambos grupos para determinar si sus distribuciones difieren significativamente (Mann, 1947).

La ecuación básica para calcular U en la prueba de Mann-Whitney U es:

$$U = R_1 - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2}$$

U representa el estadístico de la prueba de Mann – Whitney U, calculado a partir de R_1 , que es la suma de los rangos de los elementos de la primera muestra y n_1 , el tamaño de la primera muestra.

Su hipótesis nula es que las dos muestras provienen de la misma población, es decir, no hay diferencia significativa en las distribuciones de las dos muestras, mientras que su hipótesis alternativa indica que las dos muestras provienen de poblaciones diferentes, lo que implica que hay una diferencia significativa entre ellas.

U se usa para determinar el valor p, si dicho valor es menor que el nivel de significancia, se rechaza la hipótesis nula. Esto sugiere que hay una diferencia significativa entre las dos muestras.

Si el valor p es mayor que el nivel de significancia, no se puede rechazar la hipótesis nula, lo

que implica que no hay evidencia suficiente para afirmar que las dos muestras provienen de poblaciones diferentes.

Para comparar muestras de mayor tamaño se realiza una aproximación a la distribución normal, utilizando m y n, los tamaños de las muestras analizadas.

$$Z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U}$$

$$\mu_U = \frac{mn}{2} \quad \sigma_U = \sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}$$

El tamaño del efecto de Mann-Whitney (r) es una métrica que mide la magnitud de la diferencia entre dos grupos y proporciona una interpretación cuantitativa de la relevancia del resultado.

$$r = \frac{Z}{\sqrt{N}}$$

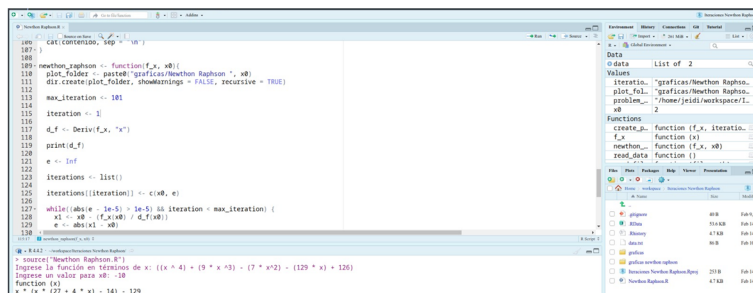
Z es el valor previamente obtenido de la prueba de Mann-Whitney U y N es el tamaño total de la muestra (la suma de los tamaños de las dos muestras).

El efecto se considera pequeño si r tiene un valor mayor a 0.10 pero menor a 0.30, mediano si se encuentra entre 0.3 y 0.5 y grande si es mayor a 0.5.

Herramienta de visualización

Para alcanzar los objetivos planteados, se desarrolló un script en R para facilitar la enseñanza del Método de Newton-Raphson. En la Figura 2 se muestra un ejemplo del uso del script en RStudio.

Figura 2. Script en R utilizado en RStudio.

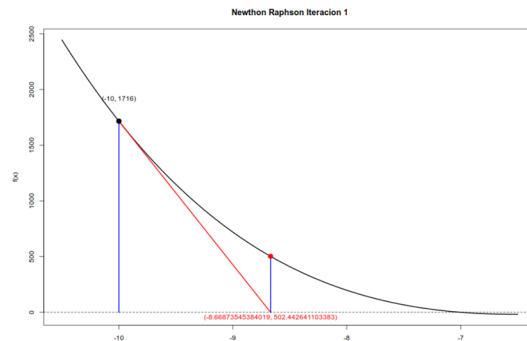


El script desarrollado en R genera la representación gráfica del proceso iterativo del Método de Newton-Raphson. En el ejemplo mostrado, se utilizó la ecuación:

$$f(x) = x^4 + 9x^3 - 7x^2 - 129x + 126$$

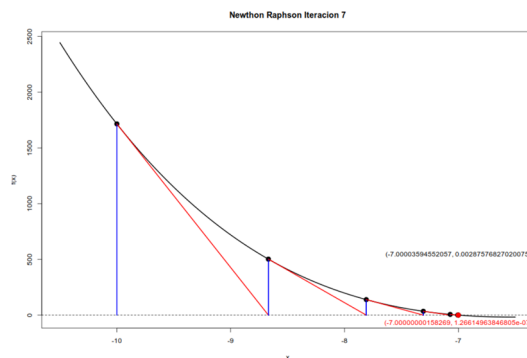
Con un valor inicial de -10. En la Figura 3 se observa la función representada en color negro, junto con la primera iteración del método. Se destaca el punto inicial x_0 y el valor correspondiente a su evaluación en la función $f(x_0)$, desde este punto, se traza la tangente a la curva (línea roja), cuya intersección con el eje x proporciona la siguiente aproximación x_1 , representada en la gráfica con un punto rojo. Las líneas azules muestran la conexión entre los puntos evaluados y el eje x, facilitando la comprensión de la evolución del método.

Figura 3. Visualización de la iteración inicial del método de Newton-Raphson.



La Figura 4 muestra la séptima iteración del método de Newton-Raphson aplicada a la misma ecuación. Se puede observar cómo las aproximaciones sucesivas convergen hacia la raíz de la ecuación, con errores cada vez menores en cada iteración. En esta etapa, los valores que están extremadamente cercanos al valor de la raíz real, lo que confirma la efectividad del método para encontrar soluciones con alta precisión. La representación gráfica de cada iteración permite a los estudiantes visualizar el proceso de refinamiento de las soluciones y comprender la dinámica de convergencia del método.

Figura 4. Visualización de la séptima iteración del método de Newton-Raphson.



El uso de esta representación gráfica ayuda a los estudiantes a visualizar la convergencia del método hacia la raíz de la ecuación, la importancia de una buena elección del punto inicial, así como la influencia de la pendiente de la función en la rapidez de la convergencia.

Esta visualización facilita la enseñanza del método al permitir que los estudiantes observen la evolución de las aproximaciones en tiempo real y refuercen su comprensión de los

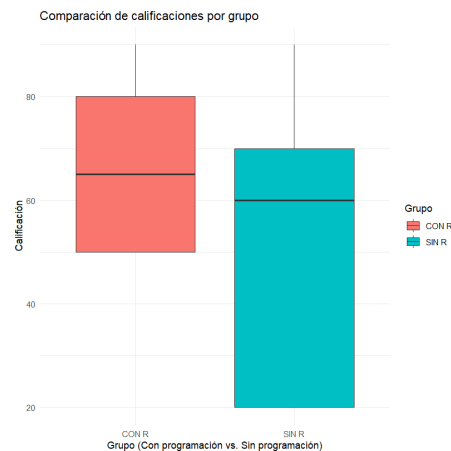
principios matemáticos subyacentes.

RESULTADOS

Se utilizaron gráficas de caja, las cuales se muestran en la Figura 5, para comparar la distribución de los resultados de evaluación en la prueba de aprendizaje entre los dos grupos: Grupo 1 (utilizaron la herramienta de visualización en R) y Grupo 2 (no utilizaron la herramienta de visualización en R).

El Grupo 1, en anaranjado, mostró una mediana más alta y menor dispersión en comparación con el Grupo 2, mostrado en color verde, lo que sugiere un mejor y más consistente desempeño en el resultado de la evaluación.

Figura 5. Gráficas de caja para los Grupos analizados.



Los histogramas permiten visualizar la distribución de las calificaciones dentro de cada grupo.

La distribución de resultados de la evaluación del grupo 1, que se puede visualizar en la Figura 6, parece más concentrada en calificaciones más altas, mientras que la distribución del grupo 2, que se puede encontrar en la Figura 7, muestra más dispersión y calificaciones más bajas con mayor frecuencia.

Figura 6. Histograma de los resultados de la evaluación del grupo 1.

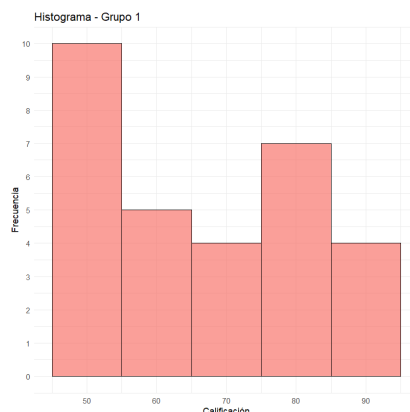
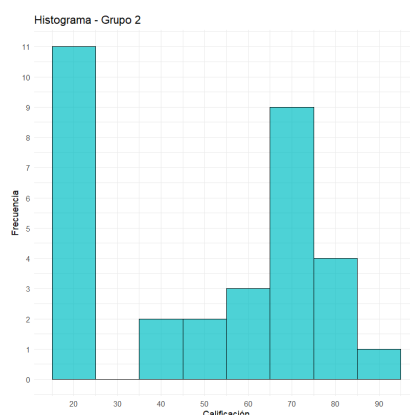


Figura 7. Histograma de los resultados de la evaluación del grupo 2.



Las calificaciones no siguen una distribución normal. Esto se verificó matemáticamente mediante la prueba de Shapiro-Wilk. Los resultados del coeficiente U y del valor de p para cada grupo se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2. Resultados de la prueba Shapiro-Wilk para ambos grupos.

	W	p
Grupo 1	0.854	0.00075
Grupo 2	0.829	0.00015

La hipótesis nula de la prueba de Shapiro-Wilk establece que los datos siguen una distribución normal. Debido a que el p-valor es menor que 0.05, se rechaza la hipótesis de normalidad para ambos grupos.

Debido a la falta de normalidad, se usó la prueba de Mann-Whitney U para la comparación de calificaciones entre los grupos, los resultados de esta prueba se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. Resultados de la prueba Mann-Whitney para comparación de grupos.

U	641.5
μ_U	480
σ_U	70.99
Z	2.275
P	0.02

La prueba de Mann-Whitney U se calculó con los datos de cada grupo, obteniendo un valor de $U = 641.5$ y un p-valor = 0.02, menor que el nivel de significancia, lo que indica una diferencia estadísticamente significativa entre los grupos.

Además, se calculó el tamaño del efecto (r de Mann-Whitney), $r = 0.289$, donde el tamaño del efecto se determina pequeño a moderado.

Un efecto de esta magnitud sugiere que el impacto del uso de R es ligeramente positivo.

CONCLUSIÓN

Los resultados indican que el uso de herramientas de visualización gráfica en la enseñanza del Método de Newton-Raphson tiene un impacto positivo en la comprensión del método por parte de los estudiantes. El grupo que utilizó R mostró un mejor desempeño en la prueba de evaluación, con calificaciones más altas y menos dispersión en comparación con el grupo que utilizó solo enfoques teóricos.

La prueba de Mann-Whitney U confirmó que la diferencia entre ambos grupos es estadísticamente significativa ($p = 0.0213$), lo que sugiere que el uso de herramientas interactivas facilita el aprendizaje y mejora la retención del conocimiento.

Se recomienda integrar herramientas computacionales en la enseñanza de métodos numéricos, ya que facilitan la comprensión de conceptos abstractos y pueden reducir las dificultades de aprendizaje. No obstante, resulta esencial brindar capacitación a los estudiantes en el uso del lenguaje R para maximizar su aprovechamiento.

Además, se sugiere ampliar el estudio con muestras más grandes y evaluar el impacto del uso de diferentes herramientas de visualización en otros métodos numéricos, como el Método de Bisección o el de Secante.

BIBLIOGRAFÍA

- Carroll, J. (1992). The role of computer software in numerical analysis teaching. *ACM SIGNUM Newsletter*, 27(2), pp. 2-31. <https://dl.acm.org/doi/abs/10.1145/140682.140686>
- Handayani, A. D., Herman, T., y Fatimah, S. (2017). Developing teaching material software assisted for numerical methods. *Journal of Physics: Conference Series Vol. 895, No. 1*, pp. 012068. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742->

6596/895/1/012068/meta

- Ketcheson, D. I. (6-13 de junio de 2014). *Teaching numerical methods with IPython notebooks and inquiry-based learning*. SciPy 2014. Proceedings of the 13th Python in Science Conference. Austin, Texas. <https://repository.kaust.edu.sa/items/42cd35ac-9bcc-4cef-b733-a0c17d7afe6a>
- Lasheras, F. S. y Gutiérrez, M. F. (1-3 de julio de 2019). *Root causes of the main difficulties found by the engineering degree students in the subject numerical methods*. In EDULEARN19. Proceedings of the 11th International Conference on Education and New Learning Technologies. Palma, España. <https://library.iated.org/view/SANCHEZLASHERAS2019ROO>
- Mann, H. B. y Whitney, D. R. (1947). On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other. *The Annals of Mathematical Statistics*, 18(1), pp. 50-60. <https://www.jstor.org/stable/2236101>
- McBride, W. E. (17-18 de febrero de 1983). *Numerical methods and the micro: Color graphics as an aid to comprehension*. Proceedings of the fourteenth SIGCSE technical symposium on Computer science education. Orlando, Florida. <https://dl.acm.org/doi/abs/10.1145/800038.801066>
- Shapiro, S. S. y Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, 52(3-4), pp. 591-611. <https://academic.oup.com/biomet/article-abstract/52/3-4/591/336553>