

UNA SECUENCIA DIDÁCTICA DE MODELIZACIÓN PARA LA FORMACIÓN DE FUTUROS INGENIEROS

E. F. Martínez Díaz¹
J. J. Fonseca Vázquez²

RESUMEN

Uno de los mayores retos en la enseñanza de las matemáticas en la ingeniería es que los alumnos relacionen y/o apliquen las matemáticas en las asignaturas de especialidad de la ingeniería que cursan. Diferentes estudios han mostrado que la modelización matemática es una herramienta fundamental en la práctica de ingenieros (Pollak, 1988; Noss y Kent, 2002). La pregunta que dirige esta investigación es: ¿Qué tipo de actividades didácticas de modelización matemática pueden acercar su enseñanza con las necesidades matemáticas de la especialidad? Para abordarla, se situó dentro de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y de trabajos que han abordado el estudio de los modelos matemáticos en contextos de ingeniería (Macías 2012; Soto 2013; Romo 2014). Lo cual permitió diseñar una secuencia didáctica centrada en la optimización, tema que es enseñado en la asignatura de Cálculo Diferencial en nivel superior. Para abordar las aplicaciones en el área de Ingeniería Industrial se analizó el curso de Administración de las Operaciones I. En específico lo relativo a la cuestión de la cantidad a ordenar de cierto artículo/producto para que se mantenga un balance y se genere el menor costo posible entre el costo de mantener ese inventario y el costo de ordenarlo. Se analizó el modelo de inventarios llamado EOQ (Economic Quantity Order) conocido por los ingenieros industriales como el modelo de sierra y constituye la base de la secuencia diseñada. Ésta fue experimentada con estudiantes de primer semestre de la asignatura de cálculo diferencial obteniendo resultados interesantes. Se observó que todos los estudiantes fueron capaces de plantear el modelo matemático y encontrar la solución sin usar simplemente una "fórmula" sino el proceso de optimización de cálculo diferencial. Algo significativo que experimentaron fue tomar conciencia que existen aplicaciones del Cálculo Diferencial para el área de Ingeniería Industrial.

ANTECEDENTES

La asignatura de Cálculo Diferencial es parte de la formación básica para las áreas de ingeniería en el Instituto Tecnológico de Colima. Es la primera asignatura de Matemáticas que cursan y de acuerdo al plan de estudios *contiene los conceptos básicos para cualquier área de la ingeniería y contribuye a desarrollar en el ingeniero un pensamiento lógico, formal, heurístico y algorítmico (Plan de estudios cálculo diferencial, p.1).*

En este curso se estudian los conceptos de números reales, variable, función, límite, derivada y sus aplicaciones, estructurados por cinco unidades:

- I. Números reales
- II. Funciones
- III. Límites y continuidad
- IV. Derivadas
- V. Aplicaciones de la derivada

Dicha asignatura permite además que el estudiante *adquiera los conocimientos necesarios para afrontar con éxito el Cálculo Integral, Cálculo Vectorial, Ecuaciones Diferenciales, asignaturas de Física y Ciencias de la Ingeniería. Además, encuentra, también, los principios y las bases para el **modelado matemático** (Plan de estudios Cálculo Diferencial, p.2).*

¹ Profesora. Instituto Tecnológico de Colima. xfabi_ola@hotmail.com.

² Profesor de asignatura. Instituto Tecnológico de Colima. javierfonseca1@hotmail.com.

El objetivo general del curso, es decir la competencia específica a desarrollar en el curso es la de *plantear y resolver problemas que requieren el concepto de función de una variable para modelar y de la derivada para resolver*. Se habla en general de resolver problemas pero sin especificar el enfoque o área de aplicación.

La quinta unidad (aplicaciones de la derivada) en la competencia específica de la unidad vuelve a hacer mención acerca de solucionar problemas:

Aplicar el concepto de la derivada para la solución de problemas de optimización y de variación de funciones y el de diferencial en problemas que requieren de aproximaciones (Plan de estudios Cálculo Diferencial, p.10).

También se menciona esto en las actividades de aprendizaje de esa misma unidad, en específico mencionaré la referente al tema de interés de este estudio que es la optimización:

Resolver problemas de optimización planteando el modelo correspondiente y aplicando los métodos del Cálculo Diferencial. (Plan de estudios cálculo diferencial, p.11).

Aunque se menciona que se aplique la derivada para la solución de problemas de optimización, no se menciona qué tipo de problemas se deberían resolver ni si van aplicados a alguna área en específico. El programa de Cálculo Diferencial es para todas las áreas de ingeniería y sus aplicaciones se tratan de manera general, lo cual permite plantear algunas preguntas que inspiraron esta propuesta didáctica, ¿por qué se considera que todos los estudiantes deben cursar esta asignatura, es decir ¿Cuáles son las herramientas matemáticas que provee esta asignatura? ¿Su generalidad puede satisfacer las necesidades matemáticas de diferentes ingenierías? ¿Cómo? ¿Qué aportes generan los conocimientos de cálculo para los futuros ingenieros? ¿Cuáles son las aplicaciones que pueden ser consideradas en un curso de cálculo que se ofrecen a estudiantes de diferentes especialidades en ingeniería? ¿Son las mismas aplicaciones del cálculo diferencial para todas las áreas de ingeniería? ¿Se debería enseñar de la misma manera las aplicaciones a todas las áreas de ingeniería?

Como el tema de interés es la optimización, se investigaron algunos problemas típicos de optimización que se presentan a los alumnos en el aula de clases para ver su alcance. Los textos que se eligieron para analizar algunos problemas típicos de optimización son los que regularmente utilizan los profesores del Tecnológico de Colima y que por ende están disponibles en la biblioteca de dicha institución, algunos de ellos son sugeridos en las fuentes de información del plan de estudios. Algunos ejemplos de problemas son (Zill y Wright, 2011)

- 1) *Un canalón para agua de 20 pies de longitud tiene extremos en forma de triángulos isósceles cuyos lados miden 4 pies de longitud. Determine la dimensión a través del extremo triangular de modo que el volumen del canalón sea máximo. Encuentre el volumen máximo.*
- 2) *Un granjero intenta delimitar un terreno rectangular que tenga un área de 1500m^2 . El terreno estará cercado y dividido en dos partes iguales por medio de una cerca adicional paralela a dos lados. Encuentre las dimensiones del terreno que requiere la menor cantidad de cerca.*

3) Cuando se ignora la resistencia del aire, el alcance horizontal R de un proyectil está dado por

$$R(\theta) = \frac{v_o^2}{g} \sin 2\theta$$

Donde v_o es la velocidad inicial constante, g es la aceleración de la gravedad y θ es el ángulo de elevación o salida. Encuentre el alcance máximo del proyectil.

Este tipo de ejercicios es el que se presenta en la mayoría de los libros de cálculo diferencial de la biblioteca del Instituto Tecnológico de Colima, son de aplicación general y se imparten de manera indistinta para todas las áreas de ingeniería.

En los problemas de optimización, la modelización matemática juega un papel importante, implica relacionar conocimientos matemáticos, físicos y de ingeniería, pero dichas relaciones no puedan generarse de manera automática al enfrentar las tareas ingenieriles. Es decir, consideramos necesario producir recursos didácticos específicos para que los estudiantes aprendan a aplicar conocimientos del cálculo diferencial acorde al área de ingeniería que cursan.

Para reconocer cuáles son las herramientas matemáticas que los ingenieros necesitan en su formación de especialidad, se analizó un curso del área de ingeniería industrial. El curso elegido es Administración de las Operaciones I.

El curso de Administración de las Operaciones I es una asignatura propia de la carrera de Ingeniería Industrial y se imparte en el quinto semestre, una vez que los alumnos cursaron las materias del área de ciencias básicas (Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Cálculo Vectorial, Física, Estadística, etc.). Esta asignatura pretende proporcionar al alumno conceptos esenciales de los sistemas de producción de empresas productoras de bienes y servicios. Está compuesto por cinco unidades y el objetivo que se declara en el plan de estudios es el siguiente:

Utilizar técnicas de pronósticos y de planeación de la capacidad para tomar decisiones en la administración de sistemas de producción de bienes y servicios. Aplicar técnicas de inventarios y de administración de almacenes para optimizar los sistemas de almacenamiento. (Plan de estudios administración de las operaciones, p. 6).

Este curso se seleccionó debido a su aporte al perfil de egreso de los ingenieros industriales pues les enseña a analizar, diseñar y gestionar sistemas productivos desde la provisión de insumos hasta la entrega de bienes y servicios, integrándolos con efectividad. Por lo tanto es una asignatura enfocada a la práctica de los ingenieros industriales, lo cual es tema de interés para el diseño de esta actividad.

La unidad 3 se llama Administración de Inventarios y su competencia específica es: conocer y aplicar los modelos y sistemas de inventarios y adecuar a las características propias de la empresa. Aunque no se precisa la naturaleza de estos modelos en una primera revisión del curso se pudo observar algunos de éstos son matemáticos y/o están basados en elementos matemáticos.

Dentro de los diferentes modelos del funcionamiento de los inventarios existe el modelo EOQ (*EconomicQuantity Orden*) o cantidad económica a pedir de la Figura 1, que es el modelo en el cual se basa la secuencia diseñada.

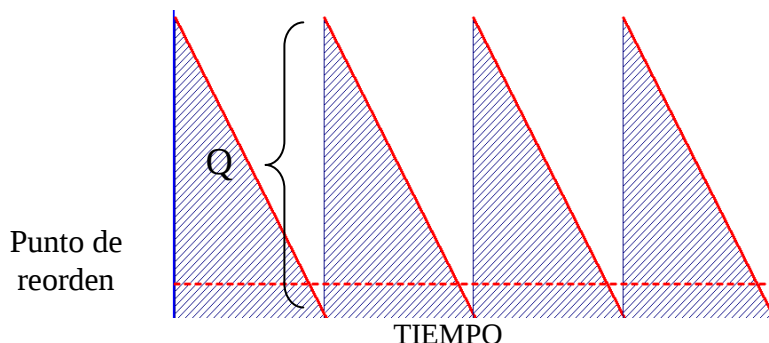


Figura 1. Representación gráfica del modelo de EOQ

Este modelo, como puede verse en la Figura anterior, está inserto en el cuadrante 1 de los ejes coordenados y se representa por medio de periodos, en este caso se muestran cuatro. Las líneas rectas que aparecen en rojo con pendiente negativa representan la manera en que se consume el inventario. Al inicio de cada periodo llega la cantidad que se solicitó (Q) y al ser la demanda uniforme, su consumo también es uniforme, antes de que se termine se llega a un punto en que hay que pedirlo, éste es conocido como punto de reorden. Lo anterior, permite que al final del periodo, justo cuando éste se termina nuevamente llega el pedido (Q) y el nivel de inventario sube a su punto máximo para después ser consumido nuevamente de manera constante.

Las preguntas obligatorias en este modelo son:

- ¿Cuánto encargar (Q)?
- ¿Cuándo encargarlo (punto de reorden)?

Enseñanza del modelo EOQ (*EconomicQuantity Orden*)

Este modelo se enseña mostrando primeramente su representación gráfica (Figura 1), sus supuestos y una explicación sobre las partes del modelo (periodos, demanda, cantidad a ordenar Q , punto reorden). Posteriormente, se definen diferentes costos en función de la cantidad a ordenar Q como se muestra a continuación:

- Costo anual de compra: (Demanda anual) (costo por unidad)
- Costo anual de la orden: (número de pedidos al año) (costo de pedir/preparación)
- Costo anual por mantener el inventario: (inventario promedio) (costo de mantener y almacenar una unidad de inventario por año)

El COSTO TOTAL ANUAL es la suma de esos tres costos y la ecuación que permite calcularlo es la siguiente:

$$\text{Costo Anual Total} = \boxed{\text{Costo anual de compra}} + \boxed{\text{Costo anual de la orden}} + \boxed{\text{Costo anual por mantener el inventario}}$$

$$TC = DC + \frac{D}{Q}S + \frac{Q}{2}H$$

TC = Costo Total

D = Demanda (anual)

C = Costo por unidad

Q = Cantidad a ordenar (cantidad óptima a ordenar EOQ)

S = Costo por colocar una orden (o costo por preparación)

H = Costo anual de mantener y almacenar una unidad del inventario promedio.

La técnica que permite optimizar la función COSTO ANUAL TOTAL, consiste en calcular el mínimo de dicha función. Por lo que se presentan los pasos que se han enseñado en la materia de Cálculo Diferencial y que son: derivar la función, igualarla a cero y despejar la cantidad Q (cantidad a Ordenar) y ese valor de Q será la cantidad que genere los costos mínimos. La técnica se presenta de la siguiente manera:

$$TC = DC + \frac{D}{Q}S + \frac{Q}{2}H$$

$$\frac{dTC}{dQ} = 0 + \left(\frac{-DS}{Q^2} \right) + \frac{H}{2}$$

$$\left(\frac{-DS}{Q^2} \right) + \frac{H}{2} = 0$$

$$Q_{OPTIMA} = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

Y se les dice:

“ustedes no se preocupen por calcular el mínimo, ni derivar, ni despejar, sólo apréndanse la fórmula de Q y esa es la cantidad a ordenar de este modelo”. La parte matemática se omite y sólo se enseña a aplicar una fórmula para sustituir los valores del problema y así los alumnos resuelven todo dejando a un lado el modelo matemático implícito en la “fórmula” de Q óptima. En el curso no se modela matemáticamente sino que el modelo se presenta como se muestra una pintura o un monumento, el estudiante no tiene que explorarlo, reconocer sus partes y apreciar su utilidad. Se vuelve un objeto bonito que no se toca y en cambio se le dice como “mecanizar” su uso. ¿Qué aprende realmente un futuro ingeniero industrial? ¿Podría el futuro ingeniero modelar problemas nuevos o reconocer otros tipos de modelos matemáticos?

Los estudiantes deben aprender a utilizar las técnicas en detrimento de un análisis del modelo y de lo que éste representa. Una manera de dar lugar a la modelización matemática es a través del diseño de una actividad didáctica basada en este modelo pero que tenga lugar en la clase de cálculo diferencial. Y más precisamente en la unidad 5 dedicada a la optimización. Además de proponer una actividad que permita el análisis matemático del modelo, de sus potencialidades y usos permitirá relacionar la enseñanza de conceptos como máximos y mínimos de una función y una de sus aplicaciones en la ingeniería industrial.

Por lo tanto se diseñó y aplicó una secuencia didáctica de modelización basada en el modelo de inventarios EOQ para los alumnos del área de Ingeniería Industrial.

METODOLOGÍA

Diseño de la secuencia didáctica

En esta secuencia se pretende que el alumno aplique el concepto de derivada para solucionar un problema de optimización aplicado al área de ingeniería industrial. Para lograrlo se proponen diferentes tareas en un contexto que simula una reunión de un equipo de trabajo en una empresa electrónica dedicada al ensamblaje de componentes electrónicos, en la cual se analizan los inventarios por diferentes miembros del equipo: el supervisor de almacén, el supervisor de logística y el gerente de materiales quien actúa como mediador (basado en el modelo EOQ para manejos de inventarios). Con cada una de las intervenciones se busca generar algunas reflexiones sobre el comportamiento de los inventarios y la minimización de costos:

- Identificar cuáles son los costos asociados al manejo de los inventarios.
- Cómo se comportan los costos con diferentes tamaños de lotes.
- Cómo encontrar un balance entre todos los costos para que genere el costo mínimo con los mayores beneficios.

El contexto y la pregunta general de la secuencia son los siguientes:

La empresa Electronics S.A. de C.V. ensambla productos electrónicos recientemente su director se ha dado cuenta que si quiere una empresa altamente competitiva debe mejorar sus procedimientos y cambiar algunas políticas, por ejemplo la de inventarios. Por lo cual, ha establecido una meta minimizar los costos totales en el área de los inventarios y así incrementar sus utilidades.

La empresa estima que deberá cubrir una demanda de 1000 fuentes de poder por año. Para ensamblar cada fuente se necesitan diferentes componentes, entre ellos el fusible T630L250V. Se utiliza un fusible por cada fuente. Según los registros de la empresa, la demanda de ese fusible es constante, la totalidad de lo pedido se recibe de una vez y se va consumiendo a una tasa constante de tal forma que cuando se recibe el siguiente pedido, los materiales se han utilizado en su totalidad. En una reunión del departamento de materiales, los 3 supervisores, el de almacén, el de logística y el de compras, se reúnen con su jefe el gerente de materiales y analizan la siguiente pregunta:

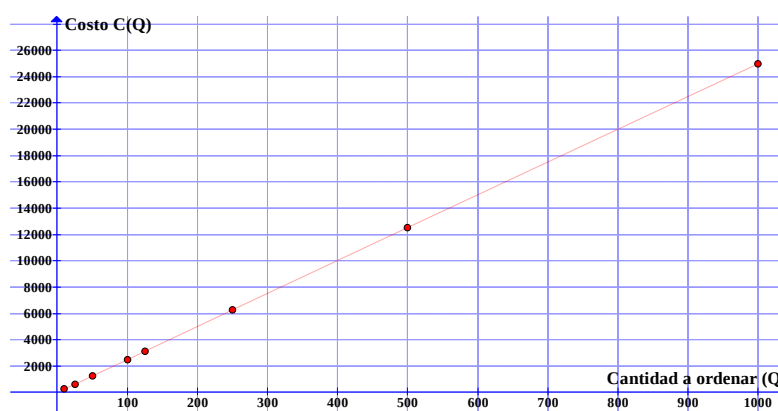
¿De qué tamaño deben ser los pedidos de dicho componente para cubrir la demanda anual de 1000 fuentes de poder y al mismo tiempo incurrir en los menores costos de inventarios?

Se realizan tres intervenciones, la primera es la del supervisor del almacén quien presenta su información en la Tabla 1.

Tabla 1. Información ofrecida por el supervisor del almacén

<i>Q cantidad a ordenar en cada periodo</i>	<i>Inventario promedio</i>	<i>Costo anual por mantener el inventario</i>
10	5	250
25	12.5	625
50	25	1250
100	50	2500
125	62.5	3125
250	125	6250
500	250	12500
1000	500	25000

Afirma que la cantidad óptima a encargar en cada periodo (Q) debe ser la más pequeña porque el costo anual de mantener el inventario será el más bajo. Para que el alumno analice esto, se le pide que grafique la Tabla 1 generando la Figura 2 y conteste en preguntas de reflexión para estudiar el comportamiento del costo anual de mantener el inventario.

**Figura 2. Gráfica del Costo Anual de Mantener el Inventario**

La segunda intervención la realiza el supervisor de logística, quien presenta su información en la Tabla 2.

Tabla 2. Información ofrecida el supervisor de logística

<i>Q cantidad a ordenar en cada periodo</i>	<i>Número de pedidos al año para cubrir la demanda anual de mil pzas</i>	<i>Costo anual por ordenar (cada orden \$250)</i>
10	100	25000
25	40	10000
50	20	5000
100	10	2500
125	8	2000
250	4	1000
500	2	500
1000	1	250

Afirma que no está de acuerdo con la intervención del supervisor del almacén y propone que la cantidad a ordenar Q en cada periodo sea la más grande porque el costo anual de ordenar es el menor. De igual manera se les pide a los alumnos que grafiquen los datos y contesten las preguntas de reflexión, la Figura 3 representa cómo quedaría la gráfica.

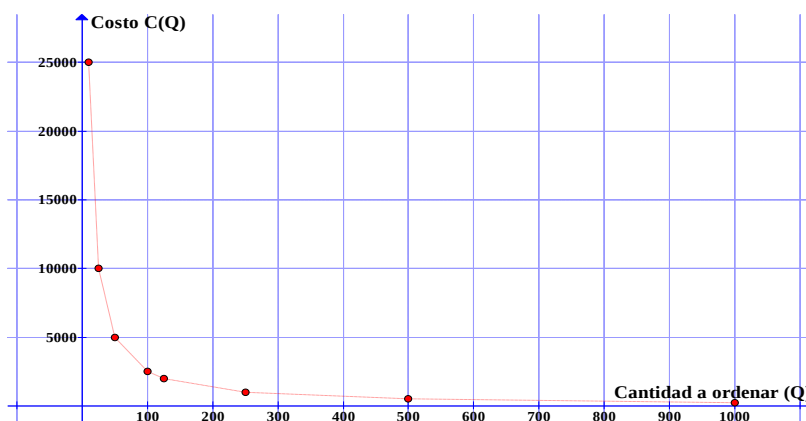


Figura 3. Gráfica del Costo Anual de Ordenar

El gerente de materiales tratando de mediar la situación y viendo que cada supervisor justifica su punto, propone una serie de preguntas de reflexión en las cuales se pretende que el alumno concluya que los dos costos son importantes y deberán ser tomados en cuenta para los cálculos del costo total anual.

En la siguiente parte de la actividad se les guía para que los alumnos encuentren el modelo matemático que mejor se ajuste a cada conjunto de datos. Esto se hace con la herramienta estadística del Excel “agregar línea de tendencia” y que presenten la ecuación que tenga el mejor ajuste. Se pretende que encuentren lo siguiente:

$$y = \frac{250000}{x}$$

La ecuación del costo anual de almacenar:

La ecuación del costo anual de pedir: $y = 25x$

El COSTO TOTAL ANUAL será la suma de los dos costos anteriores y su ecuación sería:

$$y = 25x + \frac{250000}{x}$$

Donde x representa a “ Q ” cantidad económica a ordenar acorde al modelo EOQ (Economic Quantity Order). Una vez que llegan a la ecuación, se les pregunta cómo encontrarían el valor de “ x ” que genera el menor costo total anual y se les pide que grafiquen la función como se puede observar en la Figura 4 y encuentren ese valor, lo cual es la respuesta al problema inicial planteado.

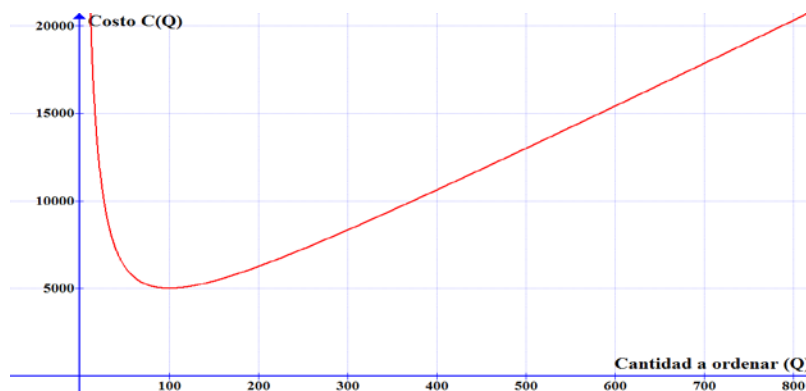


Figura 4. Gráfica del Costo Anual Total

Derivar la función de COSTO TOTAL ANUAL

$$y = 25x + \frac{250000}{x}$$

$$y' = 25 - \frac{250000}{x^2}$$

Igualarla a cero

$$25 - \frac{250000}{x^2} = 0$$

Despejar x (que equivale a Q)

$$x = \pm 100$$

$$x = 100$$

El valor de 100 obtenido en el paso anterior es la cantidad óptima del tamaño que deben tener los pedidos (Q) para obtener el costo total anual más bajo de toda la función y no habrá ningún otro valor de Q que genere menor costo.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La actividad se llevó en una sesión de 2 hrs. con un grupo de ingeniería industrial de la asignatura de cálculo diferencial. Se trabajó en 7 equipos de 5 integrantes. Previamente se les había solicitado una computadora por equipo y se les entregó una copia de la secuencia didáctica. El acomodo fue en 8 mesas de trabajo. La actividad se llevó a cabo en la última sesión de clases de la quinta unidad (aplicaciones de la derivada) una vez que los alumnos aprendieron a optimizar funciones matemáticas. Se les entregó la actividad y después de dar una breve explicación del modelo de inventarios EOQ se les invitó a que reflexionaran y analizaran la actividad en equipo propiciando la discusión y la interacción a través de breves recorridos por parte de la profesora a cada uno de los equipos. Todos los equipos terminaron en tiempo y forma y se observó que los 7 equipos de trabajo fueron capaces de:

- Graficar las funciones a partir de una tabla de valores.
- Determinar el comportamiento de la función de costo anual de mantener el inventario y la función del costo anual de ordenar.
- Encontrar el modelo matemático que representa a cada función.

- Encontrar el modelo que representa el Costo Anual Total (la suma del costo anual de mantener el inventario y del costo anual de ordenar).
- Encontrar la gráfica del Costo Anual Total.
- Aplicar el proceso matemático para encontrar el mínimo en la función matemática.
- Encontrar el valor mínimo que genera el menor Costo Anual Total gráficamente y analíticamente.
- Hacer las conclusiones del problema.

CONCLUSIONES

El diseño y la aplicación de la secuencia didáctica fueron muy enriquecedores para los alumnos ya que pudieron conocer que existen modelos matemáticos que sustentan el funcionamiento de los inventarios. Dichos modelos son complejos pero algunas de sus componentes corresponden a conceptos y técnicas matemáticas que forman parte de sus cursos y en especial del curso de Cálculo Diferencial. La secuencia fue diseñada en el marco de una propuesta teórico-metodológica, se reconocen las instituciones que participan en una formación de ingenieros: enseñanza de las matemáticas, enseñanza de las disciplinas de especialidad y práctica profesional. Se analizaron estas instituciones representadas por el plan de estudios, el curso de Cálculo Diferencial, el curso de Administración de las Operaciones I y la práctica profesional. Para reconocer cuáles son las herramientas matemáticas que los ingenieros necesitan en su formación de especialidad, es necesario analizar los modelos que se utilizan tanto en las disciplinas de especialidad como en la práctica profesional. El análisis se hizo utilizando la noción de praxeología que permite describir la actividad de modelización matemática.

El diseño de esta secuencia y su primera aplicación, sientan las bases de un proyecto que puede continuarse con el objetivo de generar un banco de actividades didácticas de aplicaciones para cada una de las áreas de ingeniería que se imparten en el Instituto Tecnológico de Colima y que de esta forma cualquier profesor de Cálculo Diferencial pueda enseñar y dar un lugar a la modelización matemática en la enseñanza de las Matemáticas del primer ciclo universitario.

BIBLIOGRAFÍA

- Kent, P. y Noss, R. (2002). *The mathematical components of engineering expertise: The relationship between doing and understanding mathematics*. Proceedings of the IEE Second Annual Symposium on Engineering Education: Professional Engineering Scenarios 2 (pp. 39/1 -39/7). London U.K.
- Macías, C. (2012). *Uso de las nuevas tecnologías en la formación de ingenieros* (Tesis de maestría no publicada). CICATA-IPN, México.
- Pollak H. O. (1988). *Mathematics as a service subject- why?* In A. G. Howson et al. (Eds), *Mathematics as a service subject*. pp.28-34. Cambridge: Cambridge University Press (Series: ICMI study).
- Representantes de los Institutos Tecnológicos. (2010) *Plan de estudios de Administración de las Operaciones I*.

Representantes de los Institutos Tecnológicos. (2009) *Plan de estudios de Cálculo Diferencial*.

Romo-Vázquez, A. (por aparecer). *La modelización matemática en la formación de ingenieros*. En Ávila, A. y Solares, A. (Eds.) Número especial de la revista Educación Matemática. México: Santillana.

Soto, S. (2013). *Una secuencia didáctica basada en modelación matemática* (Tesis de maestría no publicada). CICATA-IPN, México.

Zill, D. y Wright W. (2011). *Matemáticas 1 Cálculo Diferencial*. México D.F: McGraw Hill.