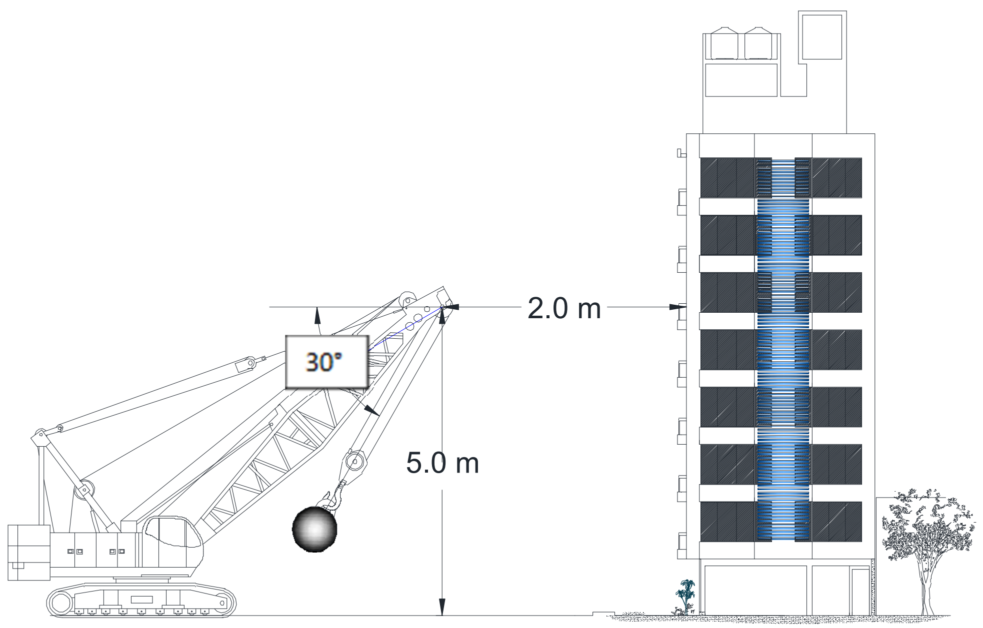
9º Concurso de Ciencias Básicas de la ANFEI
Ronda final de (Física)

Reactivo 1.

Tiempo: 12 minutos.

Una grúa para demolición, consta de un brazo móvil unido mediante una cadena de 3.5 m a una bola de demolición de 450 kg, la cadena soporta una tensión máxima de ruptura de 20 kN. Para incrementar la eficiencia de la grúa se cambia dicha bola por una de 1500 kg de masa y 50 cm de radio. En la configuración mostrada en la figura, la bola parte del reposo buscando impactar el edificio, ¿a qué altura respecto al suelo golpeará la bola el edificio?



Resolución

Resistencia de la cadena:

Para saber si la bola de demolición llegará a impactar el edificio, calcularemos en el punto más bajo de la oscilación, donde la rapidez es máxima.

$$\sum F_r = ma_r$$

$$T - mg = m\frac{v^2}{r}$$

$$T = m(g + \frac{v^2}{r})$$

Considerando que parte del reposo en el punto inicial y que

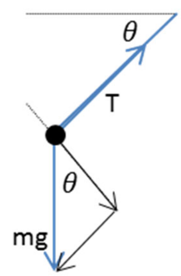
$$v^2 = 2g\Delta y$$

$$\text{Con } \Delta y = 1.75\text{m}$$

Entonces, sustituyendo datos se tiene que $\boldsymbol{T = 29.4kN}$ que es mayo que Tmax, por tanto se rompe la cadena, y será antes de llegar al punto más bajo de la oscilación.

Ángulo de rompimiento:

Para calcular el ángulo en el que se revienta en base al siguiente diagrama de fuerzas:



Planteando nuevamente sumatoria de fuerzas radiales:

$$\sum F_r = ma_r$$

$$T - mgsen\theta = m\frac{v^2}{r}$$

Para encontrar la rapidez con función del ángulo se plantea conservación de energía considerando la altura inicial:

$$v^2 = 2gh$$

Donde el cambio de altura h está dado por:

$$h = rsen\theta - rsen30°$$

Sustituyendo h y v^2en la expresión del análisis de fuerzas obtenemos:

$$T - mgsen\theta = \frac{m}{r}[2gr(sen\theta - sen30°)]$$

Desarrollando para despejar el ángulo θ y sustituyendo $sen30° = 0.5$

$$T - mgsen\theta = 2mgsen\theta - mg$$

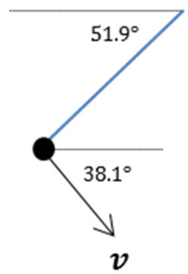
$$T + mg = 3mgsen\theta$$

$$\theta = sen^{-1}\left(\frac{T}{3mg} - \frac{1}{3}\right)$$

Sustituyendo datos, $\boldsymbol{\theta = 51.9}$° a partir de ese punto desarrollará la bola una trayectoria de tiro parabólico.

Trayectoria de la bola:

Ya con el valor del ángulo de ruptura podemos plantear el siguiente esquema:



Con una rapidez de 4.437 m/s, considerando nuevamente conservación de energía en ir de una altura de $1.75\,m$ a un $rsen\,(51.9°) = 2.75m$. Las componentes de la velocidad son $v_{0x} = 3.491\,m/s$ y $v_{0y} = -2.738\,m/s$.

Se calcula ahora el tiempo de vuelo para saber si la bola llegará a hacer contacto con el edificio.

Partiendo de:

$$d_y = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

Considerando que $d_y = -1.75\,m$ tomando en cuenta para esto el radio de la bola de 0.5 m. Se obtiene $\boldsymbol{t = 0.38s.}$

Para encontrar la posición horizontal, usamos $d_x = v_x t,$ obteniendo:

$$\boldsymbol{d_x = 1.327\,m}$$

Tomando en cuenta que la bola parte de una distancia horizontal de $rcos\,(51.9°) = 2.16m$. Se concluye que no llega a hacer contacto con el edificio en su trayectoria, y la bola hace un primer contacto en el piso a una distancia de $2.33\,m$.

Reactivo 2.

Tiempo: 12 minutos.

Un ingeniero se ve en la necesidad de caracterizar un termopar, para ello registra valores de diferencia de potencial a diferentes temperaturas las cuales se muestran en la tabla. Se sabe que en un instrumento de este tipo la diferencia de potencial (V) en términos de la temperatura (T) se puede expresar, en cierto intervalo, con un polinomio de la forma:

$$V = A + B\,T + C\,T^{2} + D\,T^{3}$$, donde V está en mV y T en °C.

El termopar a caracterizar es apropiado si satisface una tolerancia del 1% en sus lecturas.

T (°C)	25	100	175	250
V (mV)	1	4.095	7.139	10.151

Si la temperatura a 9 mV es 220 °C, determina:

a) La temperatura que indicaría el termopar cuando la diferencia de potencial aplicada es 9 mV.

b) Si el ingeniero tiene indicios para considerar apropiado el instrumento de medición que caracterizó basado en el criterio indicado. Justifica tu respuesta.

Resolución

a) Con base en los datos proporcionados en la tabla se puede establecer un sistema de ecuaciones para establecer los coeficientes del polinomio asociado.

$$A + B\,(25) + C\,(25)^2 + D\,(25)^3 = 1 \text{ …. } (1)$$

$$A + B\,(100) + C\,(100)^2 + D\,(100)^3 = 4.095 \text{ …. } (2)$$

$$A + B\,(175) + C\,(175)^2 + D\,(175)^3 = 7.139 \text{ …. } (3)$$

$$A + B\,(250) + C\,(250)^2 + D\,(25)^3 = 10.151 \text{ …. } (4)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, con un programa de cómputo se tiene:

```
> restart;
> ec1 := A + 25·B + 50·C + 15625·D1 = 1;
                    ec1 := A + 25 B + 50 C + 15625 D1 = 1
> ec2 := A + 100·B + 10000·C + 1000000·D1 = 4.095;
                    ec2 := A + 100 B + 10000 C + 1000000 D1 = 4.095
> ec3 := A + 175·B + 30625·C + 5359375·D1 = 7.139;
                    ec3 := A + 175 B + 30625 C + 5359375 D1 = 7.139
> ec4 := A + 250·B + 62500·C + 15625000·D1 = 10.151;
                    ec4 := A + 250 B + 62500 C + 15625000 D1 = 10.151
> resp := solve( {ec1, ec2, ec3, ec4} );
  resp := {A = -0.05394034825, B = 0.04216723671, C = -0.000007703952902, D1 = 9.256206585 10^-9}
```

Por lo que el polinomio queda como sigue:

$$-0.05394035 + 0.04216724\,T - 0.000077\,T^2 + 9.2562 \times 10^{-9}\,T^3 = V$$

Se sustituye en el polinomio el valor de V = 9 mV para encontrar el valor de T ;

$$-0.05394035 + 0.04216724\,T - 0.000077\,T^2 + 9.2562 \times 10^{-9}\,T^3 = 9$$

Resolviendo el polinomio con un programa de cómputo se tiene que las raíces del mismo son:

```
> polinomio := A + B·T + C·T^2 + D1·T^3 = 9;
  polinomio := 9.256206585 10^-9 T^3 - 0.000007703952902 T^2 + 0.04216723671 T - 0.05394034825 = 9
> solve( {polinomio} );
      {T = 221.2826567}, {T = 305.5093286 + 2080.148961 I}, {T = 305.5093286 - 2080.148961 I}
```

$$T_1 = 221.2827\ ;\ T_2 = 305.51 + 2080.15\,i\ ;\ T_3 = 305.51 - 2080 - 15\,i$$

Se descartan las raíces complejas, por lo que la temperatura buscada que corresponde a una diferencia de potencial de 9 mV es T = 221. 2827 °C.

b) Con base en el criterio de aceptación indicado se calcula el error para el valor de temperatura anterior:

$$\%error = \left|\frac{T_{ref} - T}{T_{ref}}\right| \times 100 = \left|\frac{220 - 221.2827}{220}\right| \times 100 = 0.583$$

como el porcentaje de error es menor a 1% hay indicios de que se puede aceptar al instrumento como apropiado.

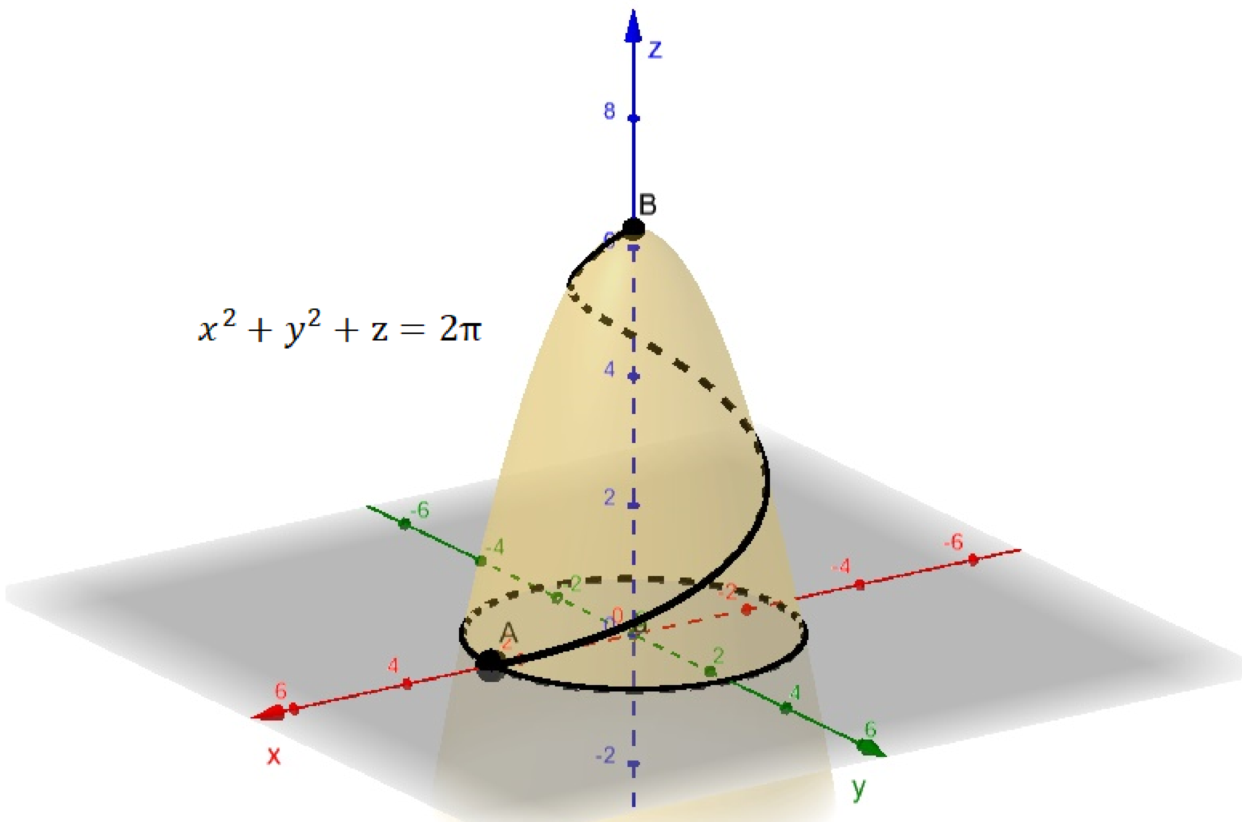
Reactivo 3

Tiempo: 12 minutos.

Un ciclista sube una montaña con la trayectoria mostrada en la figura. Completa una revolución alrededor de la montaña cuando llega a la cima, su ritmo de avance es constante. Si en todo el viaje ejerce una fuerza descrita por el siguiente campo vectorial:

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = y\,\boldsymbol{i} + x\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

Determine el trabajo hecho por el ciclista al moverse del punto A al B.



Resolución

Utilizando la integral de línea de un campo vectorial:

Sea **F** un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave ***C***, dada por r (t), en el intervalo a $\leq$ t $\leq$ b; la integral de línea de **F** sobre ***C***, está dada por:

$$W = \int_C F \cdot dr = \int_C F \cdot T\, ds = \int_a^b F[x(t), y(t), z(t)] + r'(t)\, dt$$

Considerar la trayectoria mostrada en la figura:

$x^2 + y^2 + \mathrm{z} = 2\pi$

Despejar z, obtener raíz cuadrada y elevar al cuadrado la parte derecha de la ecuación

$x^2 + y^2 = (\sqrt{2\pi - \mathrm{z}}\,)^2$

Obtener las ecuaciones paramétricas:

$x(t) = \sqrt{2\pi - t}\ \cdot \cos(t)$

$y(t) = \sqrt{2\pi - t}\ \cdot \mathrm{sen}(t)$

$z(t) = t$

Formar la función vectorial:

$r(t) = \sqrt{2\pi - t}\ \cdot \cos(t) \cdot \boldsymbol{i} + \sqrt{2\pi - t}\ \cdot sen(t) \cdot \boldsymbol{j} + (t)\mathbf{k}$

$$r'^{(t)} = \left(\frac{-1}{2\sqrt{2\pi - t}} \cos(t) - \sqrt{2\pi - t}\, sen\ (t)\right) i + \left(\frac{-1}{2\sqrt{2\pi - t}} \mathrm{sen(t)} - \sqrt{2\pi - t}\, cos\ (t)\right) j + k$$

$\boldsymbol{F}(x, y, z) = y\, \boldsymbol{i} + x\, \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$
$F[x(t), y(t), z(t)] = \sqrt{2\pi - t}\ \cdot \mathrm{sen}(t) \cdot \boldsymbol{i} + \sqrt{2\pi - t}\ \cdot cos(t) \cdot \boldsymbol{j} + \mathbf{k}$

Sustituir lo anterior en la integral de campo vectorial:

$$W = \int_0^{2\pi} (\sqrt{2\pi - t}\ \cdot \mathrm{sen}(t) \cdot \boldsymbol{i} + \sqrt{2\pi - t}\ \cdot cos(t) \cdot \boldsymbol{j} + \mathbf{k})$$

$$\cdot \left[\left(\frac{-1}{2\sqrt{2\pi - t}} \cos(t) - \sqrt{2\pi - t}\, sen\ (t)\right) i + \left(\frac{-1}{2\sqrt{2\pi - t}} \mathrm{sen(t)} - \sqrt{2\pi - t}\, cos\ (t)\right) j + k\right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2}\, sen\,(2t) + 2\pi\cos(2t) - t\cdot\cos(2t) + 1 \right] dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\,\frac{\cos(2t)}{2} + 2\pi\frac{\mathrm{sen}(2\mathrm{t})}{2} - (\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{2}t\,sen(2t)) + t \right]\ \ 0 \le t\ \le 2\pi$$

$$= \frac{1}{4}\cos(4\pi) +\ \pi\,sen(4\pi) - \frac{1}{4}\cos(4\pi) - \frac{1}{2}(2\pi)sen(4\pi) + 2\pi$$

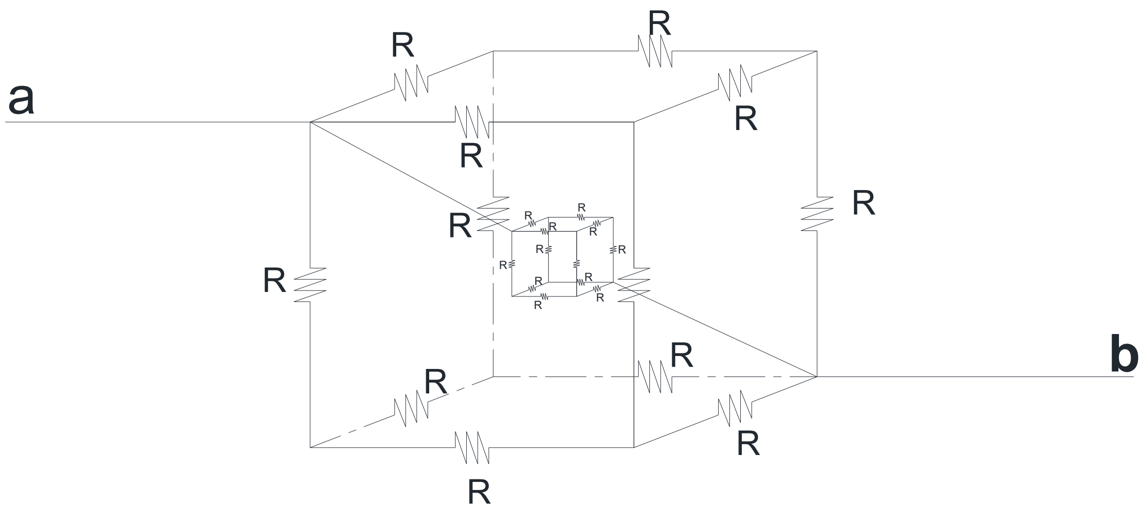
$$-[\frac{1}{4}\cos(0) +\ \pi\,sen(0) - \frac{1}{4}\cos(0) - \frac{1}{2}(0)sen(0) + 0]$$

= 2π

Reactivo 4

Tiempo: 10 minutos.

Se tiene una red eléctrica la cual es modelada como un circuito con resistencias, todas ellas de valores iguales (R en ohms) que se encuentran localizadas en los lados de un cubo como muestra la figura. El sistema tiene una red anidada que se compone de otro cubo interno, entre los puntos a y b con las mismas características del anterior. Si se aplica una diferencia de potencial de entrada $V_{ab} = 10\ V$ determine la expresión de la potencia eléctrica, en función de R, que disipa la red.



Resolución

Considerando el cubo externo, se tiene que el voltaje total en la malla es

$$V = R\frac{i}{3} + R\frac{i}{6} + R\frac{i}{3} = R\frac{5i}{6}$$

por lo que $V = R_T i = \ R\frac{5i}{6}$

así que $R_T = \frac{5}{6}R$.

Al tener el mismo cubo interno conectado en la diagonal de los puntos a y b, se puede considerar conectada en paralelo al cubo, así la resistencia total del circuito resulta

$$R_E = R_T \| R_T$$

$$R_E = \frac{(\frac{5}{6}R)}{2} = \frac{5R}{12}$$

$$P = iV = \frac{V^2}{R_E}$$

Así se tiene

$$P = \frac{10^2}{\frac{5R}{12}} = \frac{1200}{5R} = \frac{240}{R}$$

Reactivo 5

Tiempo: 10 minutos.

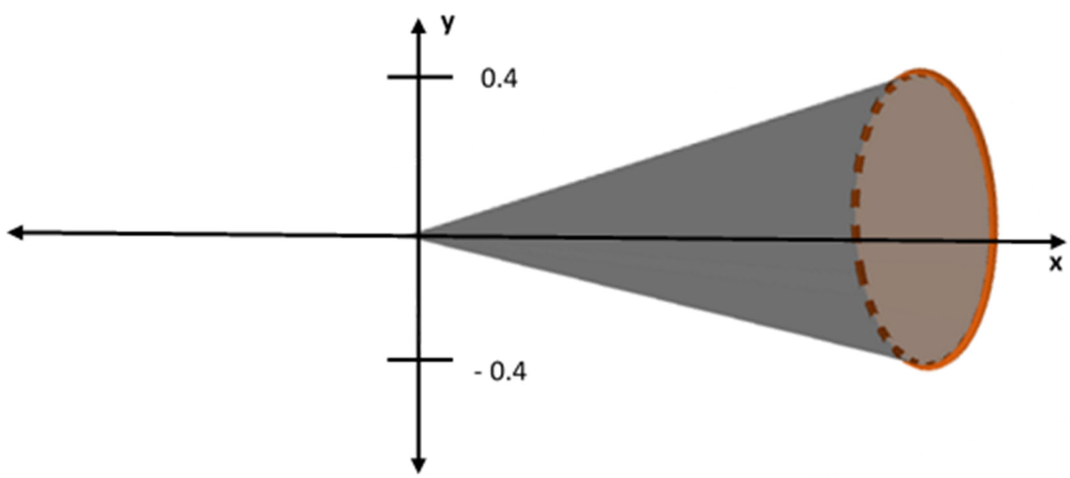
Un cohete de iones emite iones de cesio positivos desde un electrodo en forma de cuña hacia la región descrita por x > |y|. El campo eléctrico que acelera las partículas es

$$\mathbf{E} = -400\,\mathbf{i} + 200\,\mathbf{j}\ \text{kV/m}.$$

Los iones poseen cargas electrónicas individuales $e = -1.602 \times 10^{-19}$ C y masa $m = 2.22 \times 10^{-25}$ kg, y viajan por el vacío con velocidad inicial cero. Si la emisión se limita a -40 cm < y < 40 cm, se desea saber si las partículas alcanzarán o no una barrera situada a 1 m de distancia.

Resolución

La región en cuestión es



La fuerza aplicada a la partícula está dada por

$$\vec{\mathbf{F}} = e\vec{\mathbf{E}} = m\vec{\mathbf{a}}$$
$$= e(-400\mathbf{i} + 200\mathbf{j})\times 10^{3} = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}\right)$$

Integrando ambos lados de la ecuación anterior obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-400e \times 10^3}{m} t + C_1$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{200e \times 10^3}{m} t + K_1$$
$$\frac{dz}{dt} = D_1$$

Integrando de nuevo, se obtiene

$$x = \frac{-400e \times 10^3}{2m} t^2 + C_1 t + C_2$$
$$y = \frac{200e \times 10^3}{2m} t^2 + K_1 t + K_2$$
$$z = D_1 t + D_2$$

En t=0, se tiene que (x,y,z)=(0,0,0), luego

$$(0{,}0{,}0) = (C_2, K_2, D_2)$$

Similarmente, (x',y',z')=(0,0,0), por tanto

$$(0{,}0{,}0) = (C_1, K_1, D_1)$$

Así, las coordenadas quedan expresadas como

$$x = \frac{-400e \times 10^3}{2m} t^2$$
$$y = \frac{200e \times 10^3}{2m} t^2$$

Nótese que

$$x = \frac{-400e \times 10^3}{2m} t^2 = -2 \frac{200e \times 10^3}{2m} t^2 = -2y$$

Puesto que -0.4 < y < 0.4, luego -0.8 < x < 0.8 y por tanto no alcanza la barrera de 1m.