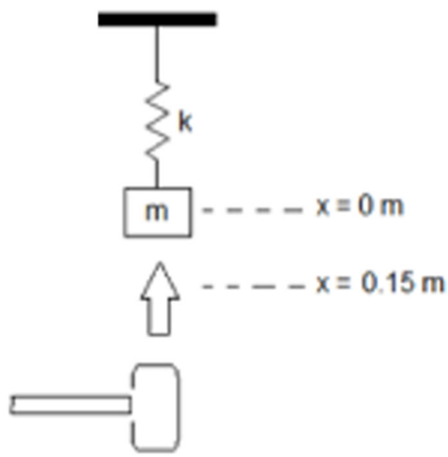
9º Concurso de Ciencias Básicas de la ANFEI
Ronda final de (Matemática)

Ejercicio 1. Tiempo: 10 minutos.

Una masa unida a un resorte se libera desde el reposo a 0.15 metros por debajo de la posición de equilibrio y comienza a vibrar. A los $\pi\ segundos$, la masa es golpeada por un martillo que ejerce un impulso de magnitud 3 N sobre la masa de 1 kg, la constante del resorte es k = 9N/m. Calcule el trabajo que realiza el resorte sobre la masa desde $t_1 = \pi$ segundos hasta un tiempo $t_2 = \frac{5}{4}\pi$ segundos, el resorte se acerca o se aleja de la posición sin deformación.



SOLUCIÓN:

El modelo matemático que describe la situación de este resorte es: $m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = f(t)$

Sustituyendo valores se obtiene: $\boldsymbol{\ddot{x} + 9x = f(t)}$ donde f(t) es la fuerza impulsora dada por:

$$f(t) = 3\delta(t - \pi)$$

Con las condiciones iniciales: x(0) = 0.15 y $\dot{x} = 0$

De 0 a π segundos el sistema mecánico presenta vibraciones libres no amortiguadas por que se comporta como un oscilador armónico.

A los π segundos el matillo golpea a la masa y provoca que ésta presente vibraciones forzadas.

Para resolver la ecuación $\ddot{\boldsymbol{x}} + \mathbf{9}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$ aplicaremos transformadas de Laplace a ambos lados de la ecuación diferencial:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 9\mathcal{L}\{x\} = 3\mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\}$$

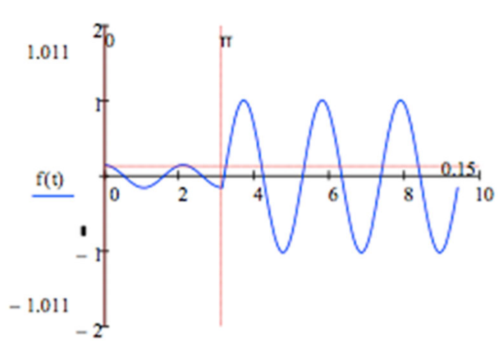
$$s^2X(s) - s\,x(0) - \dot{x}(0) + 9X(s) = 3e^{-\pi s}$$

$$X(s) = \frac{0.15s + 3e^{-\pi s}}{s^2 + 9}$$

Aplicando transformada inversa de Laplace a esta expresión, (forma inversa del segundo teorema de traslación) se obtiene la expresión para el desplazamiento de la masa en función del tiempo.

$$x(t) \ = 0.15\,cos(3t) + sen[3(t-\pi)]u(t-\pi)$$

Al graficar esta función:



Respuesta natural o transitoria del sistema $x_c(t) = 0.15\, cos(3t)$

Respuesta forzada o de estado estable del sistema $x_p(t) = sen[3(t-\pi)]u(t-\pi)$

Para obtener el trabajo realizado por una fuerza F, ejercida por un resorte sobre una masa durante un desplazamiento finito de la masa, desde t_1 hasta t_2

$$dW = -Fdx = -kxdx$$

$$W_{1\rightarrow 2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$$

Para obtener los desplazamientos x_1 y x_2 sustituimos los tiempos en la ecuación:

$$x(t) = 0.15\, cos(3t) + sen[3(t-\pi)]u(t-\pi)$$

Para t = π $\Rightarrow$ $x(\pi) = 0.15\, cos(3\pi) + sen[3(\pi-\pi)]u(\pi-\pi) = -0.15m$

Para t = $\frac{5}{4}\pi$ $\Rightarrow$

$$x(\frac{5}{4}\pi) = 0.15\, cos\left(3\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right) + sen\left[3\left(\left(\frac{5}{4}\pi\right)-\pi\right)\right]u\left(\left(\frac{5}{4}\pi\right)-\pi\right)$$

$$x(\frac{5}{4}\pi) = 0.8132\, m$$

Sustituyendo en la ecuación del trabajo:

$$W_{1\rightarrow 2} = -\frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$$

$$W_{1\to 2} = -\frac{1}{2}\left(9\frac{N}{m}\right)\left((0.15m)^2 - (0.8132m)^2\right) = \mathbf{2.8746J}$$

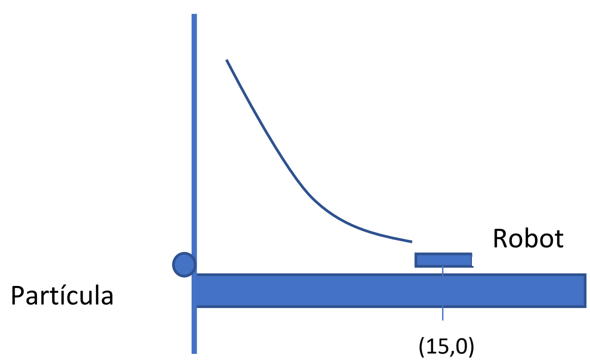
El signo negativo significa que la masa se aleja de la posición de no deformación del resorte.

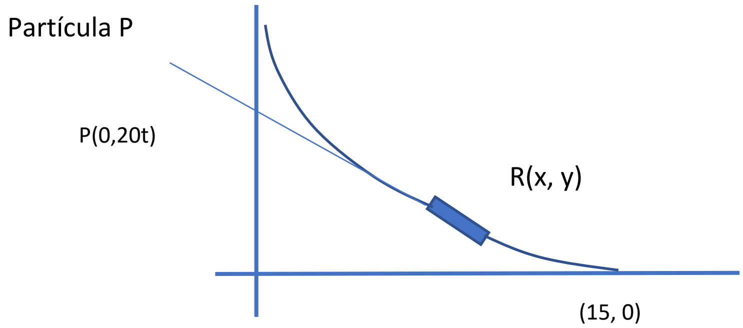
Ejercicio 2. Tiempo: 15 minutos

En un concurso de Robots seguidores. El Robot sigue una partícula que se mueve desde el origen a una rapidez de 20 cm/s en dirección del eje y positivo, manteniendo la distancia mínima con la partícula. La rapidez del robot es de 20 cm/s.

La posición inicial del robot es (15, 0).

a) Durante los ensayos previos, a un participante se le descompone el sensor de proximidad. El participante decide programar la trayectoria del seguidor. ¿Cuál es esta trayectoria si la partícula continua su movimiento sobre el eje y?
b) ¿Cómo se daría cuenta el jurado de la trampa del participante?





SOLUCIÓN:

En el instante en el que inicia la persecución, la partícula parte del origen, con una velocidad de 20 km/h, por lo tanto, en cualquier instante t, la posición de la partícula será (0,20t)

Así para cualquier tiempo t, la recta PR será tangente a la trayectoria buscada, es decir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{20t - y}{-x}$$

O bien. $-x\frac{dy}{dx} = 20t - y$

Derivando respecto a x

$$-x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 20\frac{dt}{dx} - \frac{dy}{dx}$$

$$-x\frac{d^2y}{dx^2} = 20\frac{dt}{dx}$$

Para obtener $\frac{dt}{dx}$

La longitud de arco lo podemos obtener como:

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{dt}{dx}=\frac{dt}{dl}\frac{dl}{dx}=-\frac{1}{v}\sqrt{1+y'^2}$$

Donde:

- v es la rapidez del robot.
- El signo negativo indica que, al aumentar *l*, x disminuye.
- Combinando estas dos ecuaciones se obtiene:

Sustituyendo

$\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{v}\sqrt{1+y'^2}$ en

$$-x\frac{d^2y}{dx^2}=20\frac{dt}{dx}$$

Se obtiene:

$$-x\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{20}{v}\sqrt{1+y'^2}$$

Ecuación de segundo orden, para resolver esta ecuación proponemos el cambio de variable y´= $\frac{dy}{dx}$ =w.

Entonces $xw'=\frac{20}{v}\sqrt{1+w^2}$ como v = 20 cm/s $xw'=\sqrt{1+w^2}$

Resolviendo por separación de variables e integrando

$$ln\left[w+\sqrt{1+w^2}\right]=ln(xC_1)$$

aplicando exponenciales

$w+\sqrt{1+w^2}=C_1x$ Solución general

Aplicando la condición si x = 15 y w = 0 se obtiene: $C_1=15^{-1}$

Sustituyendo C_1 y despejando w de esta ecuación se tendrá:

$w+\sqrt{1+w^2}=C_1x$ se obtiene $w+\sqrt{1+w^2}=\frac{x}{15}$

Despejando w

$w=\frac{x}{30}-\frac{7.5}{x}$ Como $w=\frac{dy}{dx}, entonces:$ $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{30}-\frac{7.5}{x}$

Resolviendo de nuevo por separación de varaibles, se obtiene: $y = \frac{x^2}{60} - \frac{15ln(x)}{2} + C_2$

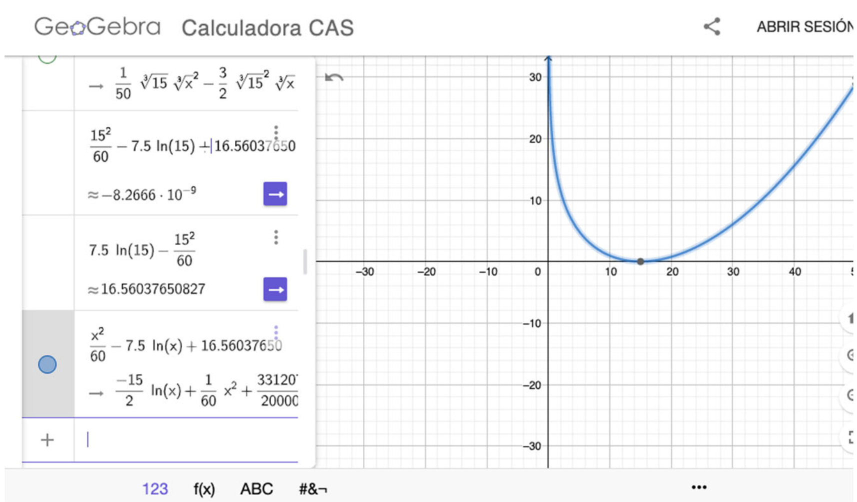
Aplicando la condición inicial, x =15 cuando y = 0 y tomando

C_2 =7.5 ln(15)$-\frac{15^2}{60} = 16.56$

Sustituyendo en la ecuación anterior se encuentra que $C_2 = 16.56$

Por lo tanto, la ecuación anterior se escribe como:

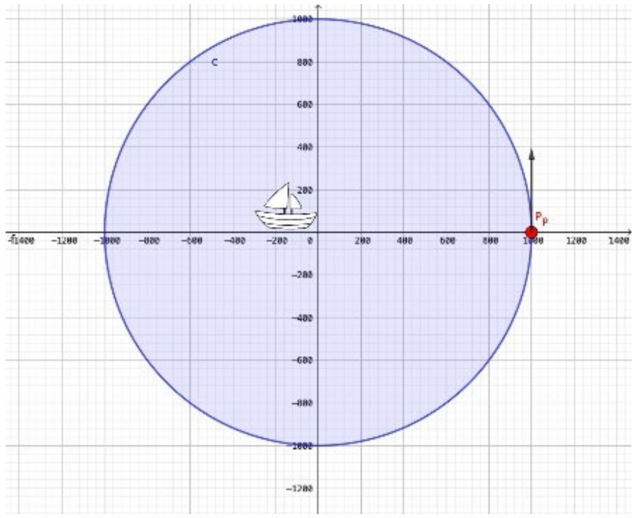
$\boldsymbol{y = \frac{x^2}{60} - \frac{15ln(x)}{2} + 16.56}$ **para x en (0,15]**



El Jurado se daría cuenta de la trampa deteniendo la partícula, y esta seguiría la trayectoria programada. Con el sensor el robot se debería acercar a la partícula con el uso del sensor.

Ejercicio 3. Tiempo: 10 minutos

Un fugitivo se halla con un bote en el centro de un estanque de radio R, encontrándose su perseguidor en el borde de este. La rapidez del perseguidor es kv, siendo v la rapidez del fugitivo. Para alcanzar el borde del estanque el fugitivo utiliza la estrategia de colocarse en sentido radialmente opuesto a la del perseguidor mientras sea posible. ¿A través de qué trayectoria se moverá el fugitivo si $R = 1\ km$, $k = 1.5$ y $v = \ 3\ m/min$?



Solución:

$$\dot{\theta} = \frac{v_p}{R} = \frac{kv}{R}$$

Integrando

$$\int d\theta = \int \frac{kv}{R} dt$$

$$\theta = \frac{kv}{R} t$$

Para las condiciones mostradas en la figura, $C = 0$, y estableciendo un sistema de referencia polar en el centro de la circunferencia, las coordenadas del fugitivo estarían dadas por $(\rho, \theta + \pi)$, ya que el fugitivo pretende mantenerse en posición diametralmente opuesta al perseguidor.

La velocidad del fugitivo seria:

$$\vec{v}_F = \langle \dot{\rho}, \quad \rho\dot{\theta} \rangle$$

$$v_F^2 = v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2$$

Sustituyendo el valor de θ

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \frac{k^2v^2}{R^2}\rho^2$$

Despejando $\dot{\rho}$

$$\dot{\rho} = v\sqrt{1 - \frac{k^2}{R^2}\rho}$$

Separando variables e integrando

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{R^2}\rho}} = \int vdt$$

$$vt = \frac{R}{k}\sin^{-1}\left(\frac{k}{R}\rho\right)$$

Despejando ρ

$$\rho = \frac{R}{k}\sin\left(\frac{kv}{R}t\right)$$

Con lo que tenemos las paramétricas polares como

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{R}{k}\sin\left(\dfrac{kv}{R}t\right) \\ \\ \theta = \dfrac{kv}{R}t + \pi \end{cases} \qquad Para\ \ 0 \le t < \frac{R\pi}{kv}$$

Y

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{R}{k}\sin\left(\dfrac{kv}{R}t\right) \\ \\ \theta = \dfrac{kv}{R}t \end{cases} \qquad Para\ \ \frac{R\pi}{kv} \le t < \frac{2R\pi}{kv}$$

Ejercicio 4. Tiempo:10 minutos

En un laboratorio de la ciudad de México, el cual se especializa en verificar la rigidez de los materiales al dejarlos caer de cierta altura. Los investigadores han planteado una expresión experimental para su aceleración,

$$\frac{m}{g}a = -\frac{K\rho v^2 A}{2} + m$$

donde g es la aceleración de la gravedad ($9.81 m/s^2$), m es la masa del material, K es su coeficiente de forma, A es el área de la proyección de la bola sobre un plano normal al movimiento, v es su velocidad y ρ es la densidad del aire. Se establece que una bola de material (cuyo diseño se reserva el fabricante) debe soportar máximo una velocidad de impacto de 23 m/s. Sabiendo que $m = 0.5$ kg, $r = 6.25cm$, $K = 1.0s^2/m$, $\rho = 1.29kg/m^3$ es lanzado desde el reposo. Justifique si el material sufrirá o no daño alguno al impactar en el suelo.

Solución.

La aceleración de la partícula es dada por la expresión:

$$a(v) = 9.81 - 0.01583v^2.$$

Escribir la aceleración utilizando la regla de la cadena:

$$a(v) = v\frac{dv}{dy}.$$

Integre

$$\int_0^v \frac{vdv}{9.81 - 0.01583v^2} = \int_0^y d\,y$$

$$-\frac{1}{0.03166}[\ln(9.81 - 0.01583v^2) - \ln(9.81)] = y$$

La expresión para la velocidad es:

$v = \sqrt{619.57(1 - e^{-0.03166y})}.$

Su velocidad terminal es de $24.9m/s$.

En conclusión, el objeto se rompe para valores suficientemente grandes de y.

Ejercicio 5. Tiempo: 15 minutos.

Un robot industrial que se mueve a una rapidez de 2 m/s horizontalmente, se encarga de verificar el proceso de combustión de ciertos materiales inflamables. Para este caso, una mecha rígida es bañada en este líquido el cual hace que se consuma a una rapidez de 0.5 m/s. El robot industrial hace que la mecha de 1.5 m de longitud gire de manera constante con una frecuencia de 1 Hz manteniendo una depreciación de 30°. Indique la posición del extremo de la mecha después de 2 s, si se sabe que su posición inicial con respecto al punto de partida del robot es $(\frac{-3\sqrt{3}}{4}, 0, \frac{-3}{4})$.

Solución:

Determinando la longitud restante del material para cualquier instante.

$$L = L_0 - v_c t$$

Para el movimiento "circular" tenemos:

$$\omega = 2\pi$$

$$v_T = \frac{\sqrt{3}\omega L}{2}$$

Por lo que el vector velocidad quedarían como:

$$\vec{v}_T = \langle -\frac{\sqrt{3}\omega L}{2}\operatorname{sen}(\omega t + \pi) + 2, \quad \frac{\sqrt{3}\omega L}{2}\cos(\omega t + \pi), \quad \frac{v_c}{2}\rangle$$

Por lo que el vector posición en cualquier instante quedaría como

$$\vec{r} = \left(\frac{\sqrt{3}(L_0 - v_c t)}{2}\cos(\omega t + \pi) + \frac{\sqrt{3}v_c}{2\omega}\operatorname{sen}(\omega t + \pi) + 2t, \right.$$
$$\left. \frac{\sqrt{3}(L_0 - v_c t)}{2}\operatorname{sen}(\omega t + \pi) - \frac{\sqrt{3}v_c}{2\omega}\cos(\omega t + \pi), -\frac{3}{4} + \frac{v_c}{2}t\right)$$

Por lo que al evaluar obtenemos la posición final (3.567,0.0889,-0.25)